P1

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\theta,1)$. ΝΔΟ δεν υπάρχει Ο.Ι.Ε. για

$H_0: \theta=\theta_0$ έναντι $\theta\neq\theta_0$ σε ε.σ.σ. α.

Έστω $\theta_1\neq\theta_0$ και $k>0$. Από Λ.Ν-Ρ έχουμε:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}\le k \Leftrightarrow \frac{\cancel{(2\pi)^{-\nu/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_0)^2}{2}\right\}}{\cancel{(2\pi)^{-\nu/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_1)^2}{2}\right\}}\le k$$

$$\Leftrightarrow \exp\left\{-\cancel{\frac{\Sigma x_i^2}{2}}-\frac{\nu\theta_0^2}{2}+\theta_0\Sigma x_i+\cancel{\frac{\Sigma x_i^2}{2}}+\frac{\nu\theta_1^2}{2}-\theta_1\Sigma x_i\right\}\le k$$

$$\Leftrightarrow -(\theta_1-\theta_0)\cdot\sum_{i=1}^{\nu}x_i+\frac{\nu}{2}\cdot(\theta_1^2-\theta_0^2)\le \log k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\theta_1-\theta_0)\cdot\sum_{i=1}^{\nu}x_i\ge\frac{\nu}{2}(\theta_1^2-\theta_0^2)-\log k \quad \dots \circledast$$

i) Αν $\theta_1>\theta_0$: $\sum_{i=1}^{\nu}x_i\ge\frac{\nu}{2}(\theta_1+\theta_0)-\frac{\log k}{\theta_1-\theta_0}=c_1$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i-\theta_0}{1/\sqrt{\nu}} \ge \frac{c_1-\theta_0}{1/\sqrt{\nu}} \quad ----$$

ii) Αν $\theta_1<\theta_0$: $\sum_{i=1}^{\nu}x_i\le\frac{\nu}{2}(\theta_1+\theta_0)-\frac{\log k}{\theta_1-\theta_0}=c_2$

ii) Αν $\theta_1 < \theta_0$: $\sum_{i=1}^{\nu} x_i \leq \frac{\nu}{2}(\theta_1+\theta_0) - \frac{\ln k}{\theta_1-\theta_0} = c_2$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i - \theta_0}{1/\sqrt{\nu}} \leq \frac{c_2 - \theta_0}{1/\sqrt{\nu}}.$$

Συνεπώς, η (i) καθορίζει Ι.κ.π. για τον έλεγχο: $H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$

Ομοίως, η (ii) καθορίζει Ι.κ.π για έλεγχο $H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta=\theta_1$, $\theta_1<\theta_0$.

Όμως, βάσει των ορισμών, <u>δεν</u> υπάρχει Ο.Ι.Ε. για $H_1: \theta \neq \theta_0$.

Σύνθετη έναντι Σύνθετης

Το Λ.Ν-Ρ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύνθετες υποθέσεις, όταν έχουμε σύνθετη εναλλακτική η $L(\theta \in \Theta_1)$ δεν έχει καθορισμένο τύπο, και άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε το λόγο των πιθανοφανειών.

Οπότε, σχηματίζουμε το γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών (Generalized likelihood ratio test).

Έστω: $H_0: \theta \in \Theta_0$ έναντι $H_1: \theta \in \Theta_1$

i) Υπολογίζουμε τις μέγιστες τιμές της πιθανοφάνειας κάτω από τις H_0 κ' H_1

$$L_0 = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta) \quad \text{ή} \quad L_0 = L(\theta_0)$$ αν η H_0 είναι απλή.

κ'

$$L_1 = \sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta)$$

ii) Σχηματίζουμε το <u>γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών</u>

$$\frac{L_0}{L_1}.$$

(*) Στη πράξη παίρνουμε το λόγο.

$$\frac{L_0}{L} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1} L(\theta)}$$

<u>ή</u> $$\frac{L_0}{L} = \frac{L(\theta_0)}{\sup_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1} L(\theta)}$$ αν η H_0 απλή.

Η Κ.Π. C του ελέγχου προσδιορίζεται ως εξής:

Για $k>0$: i) $\frac{L_0}{L} \leq k$ εάν $(x_1, \ldots, x_\nu) \in C$

ii) $\frac{L_0}{L} > k$ εάν $(x_1, \ldots, x_\nu) \in C'$

iii) $P_r\left[(x_1, \ldots, x_\nu) \in C \mid H_0\right] = a.$

(*) Οι έλεγχοι με βάση το Γ.Λ.Π. μπορούν να γενικευθούν και σε s-διάστατες παραμέτρους γνήσια και σε s-διάστατες παραμέτρους

$\underset{\sim}{\theta}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

i) Οι έλεγχοι που προκύπτουν από το Γ.Λ.Π. δεν είναι απαραίτητα Ο.Ι.Ε.

ii) Όταν έχουμε περισσότερες από μία παραμέτρους δεν είναι απαραίτητο πότε μία υπόθεση είναι απλή. π.χ. στην $N(\mu,\sigma^2)$ η $H_0: \mu=\mu_0$ είναι απλή αν σ^2-γνωστό ενώ είναι σύνθετη αν σ^2-άγνωστο.

iii) Όταν $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$

τότε: $L = \sup\limits_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1} L(\theta) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta})$.

όπου $\hat{\theta}$ είναι η Ε.Μ.Π.

P3.

Δευτέρα, 20 Δεκεμβρίου 2021 2:12 μμ

Έλεγχος για το μέσο μ της κανονικής όταν το σ^2-γνωστό.

Έχουμε $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ από $N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Έχουμε:

$$L_0 = L(\mu_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i-\mu_0)^2\right\}$$

και:

$$L = \sup_{\mu \in \mathbb{R}} L(\mu) = L(\hat{\mu}) = L(\bar{x}) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i-\bar{x})^2\right\}.$$

Απορ. την H_0 αν:

$$\frac{L_0}{L} \leq k \iff \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\right]\right\} \leq k$$

$$\iff -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum x_i^2} + \nu\mu_0^2 - 2\mu_0 \underbrace{\sum x_i}_{\to \nu\bar{x}} - \cancel{\sum x_i^2} - \nu\bar{x}^2 + 2\bar{x}\sum x_i\right] \leq \log k$$

$$\Leftrightarrow \nu(\mu_0^2-\bar{X}^2) - 2\Sigma X_i(\mu_0-\bar{X}) \geq -2\sigma \log k$$

$\hookrightarrow (\mu_0-\bar{x})\cdot(\mu_0+\bar{x})$

$$\Leftrightarrow (\mu_0-\bar{X})\cdot(\nu\mu_0+\nu\bar{X}-2\nu\bar{X}) \geq -2\sigma^2 \log k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu(\mu_0-\bar{X})^2 \geq -2\sigma^2 \log k$$

$$\Leftrightarrow (\mu_0-\bar{X})^2 \geq -\frac{2\sigma^2}{\nu}\log k = c$$

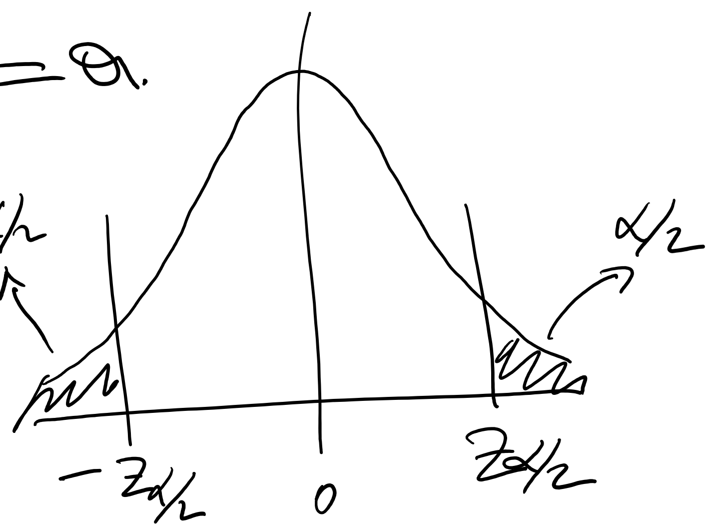
ή $|\bar{X}-\mu_0| \geq c^*$, όπου: $c^* = \sqrt{-\frac{2\sigma^2 \log k}{\nu}}$.

Για το c^* ισχύει:

$$P(C|H_0)=\alpha \Leftrightarrow P(|\bar{X}-\mu_0| \geq c^* | H_0) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{\nu}} \geq \frac{c^*}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = \alpha \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(|Z| \geq \frac{c^*}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = \alpha.$$



Επομένως, απορ. την H_0 σε ε.σ.σ. α

αν $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right| = |Z| \geq z_{\alpha/2}$

<u>Άρα</u>: $\frac{c}{\sigma/\sqrt{\nu}} = z_{\alpha/2} \Rightarrow c = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$.

<u>και</u> $|\bar{x}-\mu_0| \geq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$.

<u>άρα</u>: $\bar{X}-\mu_0 \geq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow \bar{X} \geq \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$

<u>ή</u> $\bar{X}-\mu_0 \leq -z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow \bar{X} \leq \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$

(*) Α, σ^2 - άγνωστο.

Έχουμε: $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_1: \mu\neq\mu_0$.

<u>άρα</u> σύνθετη έναντι σύνθετης

<u>Όπου</u>:

$$L_0 = \sup_{\sigma^2\in(0,\infty)} L(\mu_0,\sigma^2) = L\left(\mu_0, \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu_0)^2\right).$$

$$L = \sup_{\mu,\sigma^2} L(\mu,\sigma^2) = L\left(\bar{X}, \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{X})^2\right).$$