Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τδ από $N(\theta,1)$. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου

$$H_0: \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta = -1$$

ΝΔΟ αν $\nu = 25$, $\alpha = 0{,}05$, η ισχύς του ισχυρότατου ελέγχου είναι $0{,}999$, όταν H_1 αληθής.

Πιθανοφάνεια:

$$L(\theta) = f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta)^2\right\}$$

Οπότε: $$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = \frac{L(0)}{L(-1)} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(2\pi)^{-\nu/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-0)^2\right\}}{\cancel{(2\pi)^{-\nu/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i+1)^2\right\}} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\cancel{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2} - \cancel{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2} - \nu - 2\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right]\right\} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} X_i + \frac{\nu}{2} \right\} \le k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu} X_i + \frac{\nu}{2} \le \log k \Rightarrow \overline{X} \le \frac{\log k}{\nu} - \frac{1}{2}$$

ή $\overline{X} \le c^*$, όπου: $c^* = \frac{\log k}{\nu} - \frac{1}{2}$

Άρα, η κ.π. του ελέγχου είναι:

$$C = \{(x_1, \dots, x_\nu) ;\ \overline{X} \le c^*\} \qquad \rightarrow \overline{X} \sim N\left(\theta, \frac{1}{\nu}\right)$$

Από το Λ N-P έχουμε:

$$P[(x_1, \dots, x_\nu) \in C \mid H_0] = \alpha \Rightarrow P(C \mid \theta = 0) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(\overline{X} \le c^* \mid \theta = 0) = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{1/25}} \le \frac{c^* - 0}{\sqrt{1/25}} \right) = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Z \le 5c^*) = \alpha$$

Όμως: $P(Z \le -z_\alpha) = \alpha$

Άρα: $5c^* = -z_\alpha \Rightarrow \boxed{c^* = -\frac{z_\alpha}{5}}$.

Άρα: $5C^{*} = -z_a \Rightarrow \boxed{C^{*} = -\dfrac{\quad}{5}.}$

β) αν $\nu = 25$ και $a = 0{,}05$

Συνάρτηση ισχύος:

$$\pi(\theta) = P(C_1 \mid \theta)$$

όταν H_1 αληθής, τότε

$$\pi(\theta_1) = P(C_1 \mid H_1 \text{ αληθής}) = P(C_1 \mid \theta = -1)$$

$$= P\left(\overline{X} \leq -\frac{z_a}{5} \,\middle|\, \theta = -1\right) \qquad \underline{z_{0,05} = 1{,}645}$$

$$= P(\overline{X} \leq -0{,}329 \mid \theta = -1) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}+1}{\sqrt{1/25}} \leq \frac{-0{,}329+1}{\sqrt{1/25}}\right) = P(Z \leq 3{,}3)$$

$$= \Phi(3{,}3) = 0{,}999.$$

P2

Παρασκευή, 17 Δεκεμβρίου 2021 2:00 μμ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: Οι υποθέσεις H_0 κ' H_1 δεν είναι απαραίτητο να αντιστοιχούν στην ίδια κατανομή, αρκεί οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ να είναι ανεξάρτητες.

Δηλ. αν η H_0 είναι η απλή υπόθεση ότι η από κοινού σ.π.π. του δείγματος είναι η $g(x_1, \dots, x_\nu)$ και η H_1 είναι η απλή υπόθεση ότι η από κοινού σ.π.π. είναι η $h(x_1, \dots, x_\nu)$, τότε η ισχυρότατη κ.π. για τον έλεγχο H_0 έναντι της H_1 είναι:

i) $\dfrac{g(x_1, \dots, x_\nu)}{h(x_1, \dots, x_\nu)} \leq k$, για $(x_1, \dots, x_\nu) \in C$

ii) $\dfrac{g(x_1, \dots, x_\nu)}{h(x_1, \dots, x_\nu)} > k$, για $(x_1, \dots, x_\nu) \in C'$

iii) $P[(X_1, \dots, X_\nu) \in C \mid H_0] = a$.

P3

Παρασκευή, 17 Δεκεμβρίου 2021 2:13 μμ

ΑΠΛΗ έναντι ΣΥΝΘΕΤΗΣ

Ορισμός Έστω ελέγχουμε την απλή $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της σύνθετης H_1, ένας έλεγχος καλείται ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος

εάν είναι ισχυρότατος έναντι κάθε απλής εναλλακτικής.

Π.χ. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(0, \theta)$, $\theta > 0$. ΝΔΟ υπάρχει Ο.Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α για τον έλεγχο: $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ (μονόπλευρος).

Έστω $\theta_1 > \theta_0$, και έστω ο έλεγχος

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta = \theta_1, \quad \text{με } \theta_1 > \theta_0.$$

Εφαρμόζουμε το Λ N-P. Έχουμε:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\theta}\right)^{n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta}\right\}$$

Οπότε:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2\pi\theta_0}\right)^{\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta_0}\right\}}{\left(\frac{1}{2\pi\theta_1}\right)^{\nu/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta_1}\right\}} \leq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\nu/2} \cdot \exp\left\{\frac{-\sum x_i^2 \theta_1 + \sum x_i^2 \theta_0}{2\theta_0\theta_1}\right\} \leq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\nu/2} \exp\left\{-\frac{(\theta_1-\theta_0)}{2\theta_0\theta_1} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\right\} \leq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\log\frac{\theta_1}{\theta_0} - \frac{(\theta_1-\theta_0)}{2\theta_0\theta_1} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \leq \log k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \geq \frac{2\theta_0\theta_1}{\theta_1-\theta_0} \cdot \left[\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) - \log k\right] = c^*$$

Οπότε, το σύνολο:

$$C = \left\{(x_1, \dots, x_\nu) : \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \geq c^*\right\}$$

είναι η ισχυρότατη κ.π. του ελέγχου

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ με $\theta_1 > \theta_0$.

Έχουμε:

$$P(C_1 | H_0) = a \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \geq c^* \middle| H_0\right) = a$$

Γνωρίζουμε ότι: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

Εδώ έχουμε: $X_i \sim N(0, \theta)$

οπότε: $Z = \dfrac{X_i}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{X_i^2}{\theta} \sim \chi_1^2$$

Οπότε: $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \frac{X_i^2}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\theta} \sim \chi_\nu^2$.

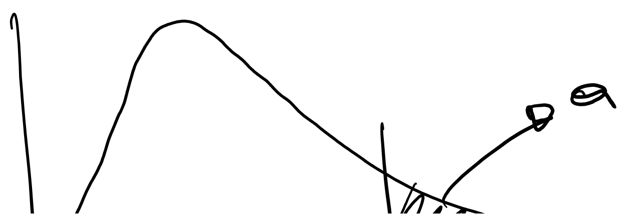
Θέλουμε: $P\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \geq c^* \middle| \theta = \theta_0\right) = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\theta} \geq \frac{c^*}{\theta} \middle| \theta = \theta_0\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\theta_0} \geq \frac{c^*}{\theta_0}\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y \geq \frac{c^*}{\theta_0}\right) = a \quad \text{όπου } Y \sim \chi_\nu^2.$$

όμως: $P(Y \geq \chi_{\nu,a}^2) = a$



Όπου: $P(Y \geq \chi_{\nu,\alpha})$ —

Οπότε:

$$\frac{c^*}{\theta_0} = \chi^2_{\nu,\alpha} \Rightarrow \boxed{c^* = \theta_0 \chi^2_{\nu,\alpha}}$$

Συνεπώς: $C_1 = \left\{ (x_1, \ldots, x_\nu) ; \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \geq \theta_0 \chi^2_{\nu,\alpha} \right\}$

είναι η ισχυρότατη κ.π. για τον έλεγχο

$H_0: \theta = \theta_0$ <u>vs</u> $H_1: \theta = \theta_1$, με $\theta_1 > \theta_0$.

(*) Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $\theta_1 > \theta_0$.

Επομένως, η $C_1 = \left\{ (x_1, \ldots, x_\nu) ; \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \geq \theta_0 \chi^2_{\nu,\alpha} \right\}$

είναι Ο.Ι. κ.π. για τον έλεγχο

$H_0: \theta = \theta_0$ <u>έναντι</u> $H_1: \theta > \theta_0$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Δεν υπάρχουν πάντα Ο.Ι.Ε.

Πιο συγκεκριμένα, αν είχαμε: $H_1: \theta \neq \theta_0$

συνήθως δεν υπάρχουν Ο.Ι.Ε.