P1

Δευτέρα, 13 Δεκεμβρίου 2021 1:14 μμ

Αν έχουμε τη γενικές υποθέσεις

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{έναντι} \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

όταν λοιπόν το Θ_0 ή Θ_1 αποτελείται από ένα σημείο π.χ. $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ ή/και $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, τότε η αντίστοιχη υπόθεση ονομάζεται απλή, αλλιώς είναι σύνθετη.

Πχ | Το παράδειγμα με το νόμισμα και έστω ότι εξετάζουμε:

$$H_0: \theta = 1/2 \quad \text{έναντι} \quad H_1: \theta = 3/4$$

Ρίψεις: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν κεφαλή} \\ 0, & \text{αν γράμματα} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$

Άρα: $X_i \sim Bern(\theta)$ και $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \theta)$

Έστω ότι έχω δείγμα $n = 6$ κι $S = 1$

Οπότε: $P(S=1 \mid H_0) = P(S=1 \mid \theta = 1/2) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6$

και: $P(S=1 \mid H_1) = P(S=1 \mid \theta = \frac{3}{4}) = \binom{6}{1}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^5$

S	$H_0: \theta = 1/2$	$H_1: \theta = 3/4$

S	$H_0: \theta = 1/2$		$H_1: \theta = 3/4$
0	$1/64$	$>$	$1/4096$
1	$6/64$	$>$	$18/4096$
2	$15/64$	$>$	$135/4096$
3	$20/64$	$>$	$540/4096$
4	$15/64$	$<$	$1215/4096$
5	$6/64$	$<$	$1458/4096$
6	$1/64$	$<$	$729/4096$.

Κοιτάζουμε κάτω από ποια υπόθεση είναι πιο πιθανό να έχουν έρθει τα δεδομένα.

Αν: $S=0,1,2,3$ τότε H_0.

Αν: $S=4,5,6$ τότε H_1

Άρα απορ. την H_0. έναντι της H_1 αν $S=4,5,6$.

⊛ Κριτήριο βασισμένο στη πιθανοφάνεια

Έστω ότι το παρατηρούμενο S πέφτει στη περιοχή $C=\{4,5,6\}$ τότε είναι η H_0 να απορρίπτεται. Η περιοχή C ονομάζεται κρίσιμη

<u>Περιοχή</u> του κριτηρίου (critical region).

i) Στην περίπτωση αυτή, η πιθ. λάθους είναι

$$P(S=4,5,6 \mid H_0 \text{ αληθής}) = P(S=4,5,6 \mid \theta=1/2) =$$

$$= P(S=4 \mid \theta=1/2) + P(S=5 \mid \theta=1/2) + P(S=6 \mid \theta=1/2) = 0{,}3438$$

Η πιθ. $P(\text{απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$, και ονομάζεται <u>πιθανότητα Σφάλματος Τύπου I</u>

ii) Υπάρχει περίπτωση σφάλματος, το <u>Σφάλμα Τύπου II</u>, όπου δεν απορρίπτουμε την H_0 ενώ η H_0 είναι εσφαλμένη.

$$P(\text{δεν απορ } H_0 \mid H_1 \text{ αληθής}) = \beta$$

Στο <u>πχ</u> η πιθ. σφ. Τύπου II

$$P(S=0,1,2,3 \mid H_1 \text{ αληθής}) = P(S=0,1,2,3 \mid \theta=3/4) =$$

$$= P(S=0 \mid \theta=3/4) + \ldots + P(S=3 \mid \theta=3/4) = 0{,}1694.$$

⊛ Δεν ισχύει: $\beta = 1 - \alpha$

ΑΛΗΘΕΙΑ

Έλεγχος		H_0 αληθής	H_1 αληθής
	Απορ. H_0	Σφ. Τύπου I (α)	✓
	Δεν απορ. H_0	✓	Σφ. Τύπου II (β).

⊛ Για έναν έλεγχο, υπάρχουν πολλά διαφορετικά κριτήρια. Επιθυμητό θα ήταν ένα κριτήριο που ελαχιστοποιεί την πιθ. σφ. τύπου I κ' II

⊛ Για δεδομένο μέγεθος δείγματος, οι 2 πιθ. σφάλματος δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα. Συνήθως προκαθορίζουμε την πιθ. σφ. τύπου I σε κάποιο επιθυμητό επίπεδο και προσπαθούμε να βρούμε κριτήριο που ελαχιστοποιεί την πιθ. σφ. τύπου II.

Ορισμός Ένα κριτήριο το οποίο καθορίζει το υποσύνολο C του δειγμ. χώρου, τέτοιο ώστε εάν $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ απορρίπτουμε την H_0 έναντι της εναλλακτικής H_1, διαφ. δεν απορρίπτουμε, καλείται <u>έλεγχος</u> της H_0 ως προς την H_1 και η C καλείται <u>κρίσιμη περιοχή του ελέγχου</u>.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

↳ Αν H_0 κ+H_1 είναι απλές υποθέσεις, τότε τα α κ' $\bar{\ }$

θα πάρουμε συγκεκριμένες τιμές. Τότε, ο έλεγχος

$$H_0: \theta \in \Theta_0 = \{\theta_0\} \quad \underline{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1 = \{\theta_1\}$$

έχει:

$$P(G \mid H_0 \text{ αληθής}) = P(G \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

και ο έλεγχος λέγεται ότι είναι <u>μεγέθους α</u>.

↳ Εάν η H_0 είναι σύνθετη, τότε το α ορίζεται από τη μέγιστη τιμή των πιθανοτήτων α από:

$$\sup_{f \in H_0} P(\text{απορ. την } H_0 \mid f) = \alpha.$$

και καλείται <u>επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας</u> (significance level).

<u>Ορισμός</u> | Συνάρτηση Ισχύος ενός Ελέγχου

Η συνάρτηση:

$$\Pi(\theta) = P_\theta(\text{απορ. } H_0) = P(G \mid \theta) = P_\theta(G)$$

ως συνάρτηση του θ καλείται συνάρτηση <u>ισχύος</u>

ως συνάρτηση του θ καλείται συνάρτηση ισχύος του ελέγχου (power function)

i) Έστω η H_0 αληθής, τότε:

$$\pi(\theta_0) = P(C \mid H_0 \text{ αληθής}) = \alpha.$$

είναι η πιθανότητα του Σφ. Τύπου Ι

ii) Έστω η H_1 αληθής, τότε:

$$\pi(\theta_1) = P(C \mid H_1 \text{ αληθής}) =$$

$$= 1 - P(C' \mid H_1 \text{ αληθής}) = 1 - \beta$$

λέγεται ισχύς του ελέγχου.

Προφανώς:

Ισχύς του ελέγχου $= 1 - P(\text{Σφ. Τύπου ΙΙ}) = 1 - \beta$.

Π.χ.) Έστω $X \sim Bin(n=10, p)$, όπου $p \in \{p : p = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

Η αρχική $H_0: p = 1/2$ απορ. έναντι της $H_1: p = 1/4$ εάν παίρνοντας 1 παρατήρηση X, η παρατηρούμενη τιμή είναι ≤ 3.

α) ποιά η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου

β) ποιά η P(σφ. τύπου I)

γ) — " — P(σφ. τύπου II).

Έχουμε:

α) $\Pi(p) = P(C|p)$, όπου: $C = \{0,1,2,3\}$

Αλλά: $X \sim Bin(10,p)$. Οπότε:

$$\Pi(p) = P(C|p) = P(X \leq 3|p) = \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$$

β) Εάν $p = 1/2$ τότε $\Pi(p) = P$(σφ. τύπου I).

Συνεπώς: $\Pi(p=1/2) = \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{64}$ πιθ. σφ. τ. I

γ) Εάν $p = 1/4$ τότε $\Pi(p) =$ Ισχύς του ελέγχου

οπότε: P(Σφ. τ. II) $= 1 - \Pi(p = 1/4)$.

$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}.$$