PL

Παρασκευή, 10 Δεκεμβρίου 2021 1:10 μμ

Πχ) Έστω $X_1, X_2, ---, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta) = \theta \cdot x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$

α) Να βρεθεί η εκτιμ. των ροπών του θ και η ΕΜΠ, έστω δ, του $1/\theta$.

β) Να βρεθεί Δ.Ε για το θ με σ.ε. $1-\alpha$.

γ) Εάν $x = 0{,}2 \quad 0{,}7 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}9$

ποιο είναι το 95% ΔΕ για το θ.

Δίνονται: $\chi^2_{10,0{,}975} = 3{,}24$ και $\chi^2_{10,0{,}025} = 20{,}48$.

<u>Υπόδειξη</u>: Για το (β) δείξτε ότι η σ.σ. $Y = 2\nu\theta\delta$ ακολουθεί $\chi^2_{2\nu}$. Δίνεται ότι $Y \sim Gamma(\nu, \theta)$ τότε:

$$f(y) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-\theta y}.$$

α) Έχουμε μια παράμετρο θ. Εξισώνουμε $E(X) = \overline{X}$, όπου:

$$\int x f\, dx = \int x \theta x^{\theta-1} dx =$$

$$E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x\,\theta x^{\theta-1}\,dx =$$

$$= \theta \int_0^1 x^{\theta}\,dx = \theta \left.\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Οπότε: $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Longrightarrow \boxed{\bar{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$

<u>ΕΜΠ.</u> Ζητάμε $\delta = \delta(\underline{x})$ εκτιμ. για το $1/\theta$.

Θα βρούμε ΕΜΠ για το θ, και από την ιδιότητα των αναλλοίωτων, έχουμε το δ.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^{\nu}\left[\prod x_i\right]^{\theta-1}$$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \nu \log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{\nu}\log x_i$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\nu}{\theta} + \sum_{i=1}^{\nu}\log x_i = 0 \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu}\log x_i}$. <u>Οπότε</u>: $\boxed{\delta = \delta(\underline{x}) = -\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\log x_i}{\nu}}$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\nu}{\theta^2} < 0, \text{ άρα μέγιστο.}$$

β) Από υπόδειξη ΝΔΟ: $Y = 2\nu\theta\delta \sim \chi^2_{2\nu}$ (PIVOT)

Έστω: $W = -\log X$. Έχουμε:

$$F_W(w) = P(W \le w) = P(-\log X \le w) =$$

$$= P(X > e^{-w}) = 1 - P(X \le e^{-w}) = 1 - F_X(e^{-w}).$$

Συνεπώς:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = \frac{d}{dw}\left[1 - F_X(e^{-w})\right] =$$

$$= -f_X(e^{-w}) \cdot (-e^{-w}) = e^{-w} \cdot f_X(e^{-w}) =$$

$$= e^{-w}\theta (e^{-w})^{\theta-1} = \theta e^{-\theta w} \text{ — } Exp(\theta)$$

Άρα: $W_i = -\log X_i \sim Exp(\theta)$

Οπότε: $T = -\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i \sim Gamma(\nu, \theta).$

Συνεπώς: $Y = 2\nu\theta\delta = 2\nu\theta\frac{T}{\nu} = 2\theta T$

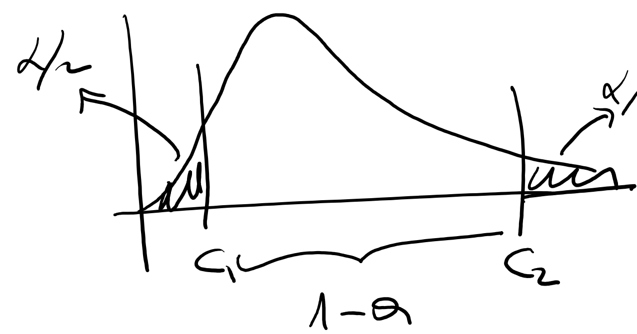
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2\theta T \le y) = P\left(T \le \frac{y}{2\theta}\right) = F_T\left(\frac{y}{2\theta}\right)$$

Οπότε: $$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2\theta}\cdot f_T\left(\frac{y}{2\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\theta}}\frac{\cancel{\theta^\nu}}{\Gamma(\nu)}\cdot\left(\frac{y}{\cancel{2\theta}}\right)^{\nu-1}\cdot e^{-\theta\cdot\left(\frac{y}{2\theta}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu)}\cdot y^{\nu-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}y} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-y/2}$$

Η οποία είναι Gamma$\left(\frac{2\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ή $\chi^2_{2\nu}$



Έχουμε:

$$Y = 2\nu\theta\delta = 2\nu\frac{\theta}{\hat{\theta}} = Y(\hat{\theta}, \theta)$$

με κατανομή ανεξάρτητη του θ.

Άρα: $P(c_1 < Y < c_2) = 1 - \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2_{2\nu,1-\alpha/2} < Y < \chi^2_{2\nu,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2_{2\nu,1-\alpha/2} < 2\theta T < \chi^2_{2\nu,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\chi^2_{2\nu,1-\alpha/2}}{2T} < \theta < \frac{\chi^2_{2\nu,\alpha/2}}{2T}\right) = 1 - \alpha$$

γ) Έχουμε: $T = -\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i = 4{,}19$

Άρα, το 95% Δ.Ε. για το θ είναι:

$$\left[\frac{3{,}24}{8{,}38}, \frac{20{,}48}{8{,}38}\right] = \left[0{,}3866 , 2{,}4439\right].$$

$\blacksquare$

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ
(Hypothesis Testing).

Πρόβλημα: Για κάποια δραστηριότητα υπάρχουν δύο αποτελέσματα ή εκφράσεις S_1 ή S_2, εκ των οποίων το ένα είναι "σωστό". Μας ενδιαφέρει να το εντοπίσουμε.

Ο στατιστικός σχεδιάζει πείραμα, όπως ώστε κάποιο αποτέλεσμα/ενδεχόμενο E συμβαίνει με μεγάλη πιθανότητα αν το S_1 είναι "σωστό" ενώ συμβαίνει με μικρή πιθ. αν το S_2 "σωστό".

(*) Στο πείραμα, τα αποτελέσματα είναι τιμές μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Τα S_1 ή S_2 αντιστοιχούν σε δύο υποθέσεις (κατανομές -- πχ δύο Poisson με διαφορετικά λ).

Το ερώτημα είναι ποια η "σωστή".

Πχ) Μας ενδιαφέρει αν ένα νόμισμα είναι αμερόληπτο.

Υποθέτουμε αρχικά ότι είναι αμερόληπτο.
Παίρνουμε ρίψεις του νομίσματος και ελέγχουμε αν τα δεδομένα περιέχουν πληροφορία ενάντια της αρχικής υπόθεσης.

Η αρχική ή μηδενική υπόθεση (null hypothesis) συμβολίζεται με H_0. Ενάντια στην αρχική υπόθεση είναι η εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis) και συμβολίζεται με H_1 ή H_a.

Πχ) Ρίχνουμε το νόμισμα n-φορές, και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν κορώνα} \\ 0, & \text{αν γράμματα} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Έστω: $P(X=1) = p$ και $P(X=0) = 1-p$

Έστω: [illegible]

H_0: νόμισμα αμερόληπτο $\qquad H_0: p = 1/2$

H_1: μεροληπτικό $\Longrightarrow$ $H_0: p \neq 1/2$

<u>Παρατήρηση</u>: Κάτω από την H_0 καθορίζεται πλήρως η κατανομή των X_i ($Bern(1/2)$), ενώ κάτω από την H_1 έχουμε οικογένεια κατανομών $Bern(p)$, $p \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$.

<u>Ορισμός</u>: Εάν η στατιστική υπόθεση καθορίζει πλήρως την κατανομή, ονομάζεται <u>απλή</u> υπόθεση. Εάν <u>δεν</u> την καθορίζει πλήρως, ονομάζεται <u>σύνθετη</u>.