ΔΕ για τη διασπορά σ^2 κανονικού πληθυσμού

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$

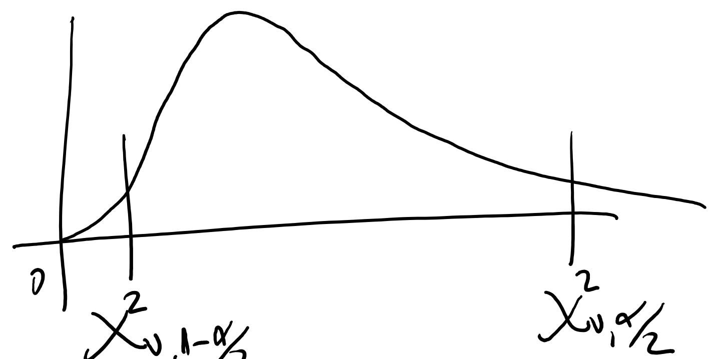
i) Έστω μ-γνωστό. Τότε $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2$ (ΕΜΠ)

Ζητάμε $\varphi(\hat{\sigma}^2, \sigma^2)$ τ.μ. με κατανομή ανεξάρτητη από παραμέτρους (σ^2)

Οπότε: $Z_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1$

Συνεπώς: $\sum_{i=1}^{\nu}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_\nu$

Άρα: $\varphi(\hat{\sigma}^2, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\nu\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_\nu$.



Άρα: $P\left(\chi^2_{\nu,1-\alpha/2} \le \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\nu,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

2

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{\nu,\alpha/2}} \leq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\nu,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Οπότε, το $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για το σ^2 είναι:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\nu,\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}}\right].$$

ii) Έστω μ-άγνωστο. Άρα: $S^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\overline{X})^2$

Γνωρίζουμε: $\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

άρα: $Y(S^2,\sigma^2) = \frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

Δουλεύουμε παρόμοια για την εύρεση του ΔΕ.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Δεν υπάρχουν μοναδικά ορισμένοι αριθμοί c_1 κ' c_2 τ.ω.: $P(c_1 < Y < c_2) = 1-\alpha$.

Μπορούμε <u>πχ</u> να πάρουμε $c_2 = \chi^2_{\alpha/4}$

και $c_1 = \chi^2_{1-\frac{3\alpha}{4}}$

Συνήθως διαλέγουμε c_1, c_2 τ.ω.

$$P(Y<c_1) = P(Y>c_2) = \alpha/2$$

P2

Τεταρτη, 8 Δεκεμβρίου 2021 1:42 μμ

Δ.Ε. για λόγο διασπορών

Έστω: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu_x, \sigma_x^2)$

και : $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τ.δ. από $N(\mu_y, \sigma_y^2)$

Ζητάμε ΔΕ για το σ_x^2 / σ_y^2

i) μ_x, μ_y - γνωστά. Άρα:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \quad \text{κ'} \quad \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \mu_y)^2$$

ii) Έστω μ_x, μ_y - άγνωστα. Τότε:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{κ'} \quad S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2$$

Γνωρίζουμε ότι: $$\frac{(n-1) \cdot S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\text{κ'} \quad \frac{(m-1) \cdot S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

Ισχύει: $$\frac{\frac{\cancel{(n-1)} \cdot S_x^2}{\sigma_x^2} \Big/ \cancel{n-1}}{\frac{\cancel{(m-1)} \cdot S_y^2}{\sigma_y^2} \Big/ \cancel{m-1}} = \frac{S_x^2 / \sigma_x^2}{S_y^2 / \sigma_y^2} \sim F_{n-1, m-1} \quad (*)$$

$$\overline{\qquad\qquad} \Big/ \sigma_y^2 / (m-1) \qquad -1/\sigma_y^2$$

Ζητάμε c_1, c_2 τ.ω.

$$P\left(c_1 \le \frac{S_x^2/\sigma_x^2}{S_y^2/\sigma_x^2} \le c_2\right) = 1-a \Rightarrow$$

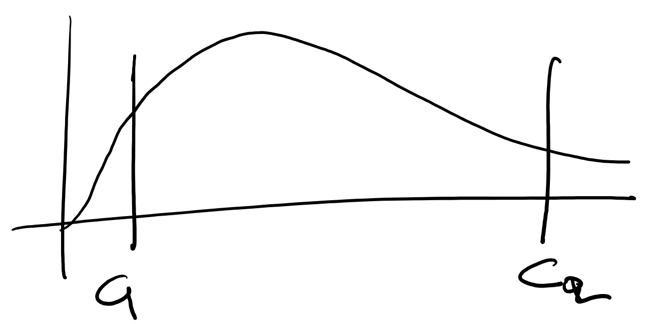
$$\Rightarrow P\left(c_1 \le \frac{S_x^2/S_y^2}{\sigma_x^2/\sigma_y^2} \le c_2\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{c_2} \le \frac{\sigma_x^2/\sigma_y^2}{S_x^2/S_y^2} \le \frac{1}{c_1}\right) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_x^2/S_y^2}{c_2} \le \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \le \frac{S_x^2/S_y^2}{c_1}\right) = 1-a$$

από:

$c_1 = F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$



και

$c_2 = F_{n-1,m-1,\alpha/2}$

⊛ Θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει:

$$\frac{\cancel{(m-1)}S_y^2 \big/ \sigma_y^2 \cancel{(m-1)}}{\cancel{(n-1)}\cdot S_x^2 \big/ \sigma_x^2 \cancel{(n-1)}} = \frac{\sigma_x^2/\sigma_y^2}{S_x^2/S_y^2} \sim F_{m-1,n-1}$$

Οπότε: $$P\left(c_1' \leq \frac{\sigma_x^2/\sigma_y^2}{S_x^2/S_y^2} \leq c_2'\right) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(c_1' \cdot \frac{S_x^2}{S_y^2} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq c_2' \frac{S_x^2}{S_y^2}\right) = 1-a$$

όπου: $c_1' = F_{m-1,n-1,1-a/2}$

και $c_2' = F_{m-1,n-1,a/2}$

Δ.Ε. για ποσοστό

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από Bernoulli(p) με ν-γνωστό. Να κατασκευαστεί ΔΕ για το P.

Η ΕΜΠ του P είναι: $\hat{P} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{\nu} = \bar{P}$

Επίσης: $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Bin(\nu, P)$.

Από ΚΟΘ (έστω $\nu > 30$): $\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} =$

$$= \frac{Y - \nu P}{\sqrt{\nu P(1-P)}} \sim N(0,1) \longrightarrow \text{γνωστή κατανομή}$$

Έχουμε: $P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{Y - \nu P}{\sqrt{\nu P(1-P)}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\frac{Y}{\nu} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{\nu}}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{Y}{\nu} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{\nu}} \leq p \leq \frac{Y}{\nu} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{\nu}}\right) = 1-\alpha$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Επειδή η άγνωστη παράμετρος p εμφανίζεται στα άκρα του διαστήματος αντικαθιστούμε μέσα στη ρίζα το p με την εκτιμήτρια του $\hat{p} = \frac{Y}{\nu}$ (εάν ν - μεγάλο).

Τότε το Δ.Ε. είναι:

$$\frac{Y}{\nu} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{Y/\nu\cdot(1-Y/\nu)}{\nu}}$$

<u>Δ.Ε. για διαφορά δύο ποσοστών</u>

Έστω $Y_1 \sim Bin(n_1, p_1)$ με n_1, n_2 - γνωστά

$Y_2 \sim Bin(n_2, p_2)$ Y_1, Y_2 ανεξ.

Ζητάμε Δ.Ε. για το: $p_1 - p_2$

Έχουμε: $E(Y_1) = n_1 p_1$, $V(Y_1) = n_1 p_1 (1-p_1)$

$E(Y_2) = n_2 p_2$, $V(Y_2) = n_2 p_2 (1-p_2)$

Άρα: η τ.μ. $\frac{y_1}{n_1}-\frac{y_2}{n_2}$ έχει:

$$E\left[\frac{y_1}{n_1}-\frac{y_2}{n_2}\right]=E\left[\frac{y_1}{n_1}\right]-E\left[\frac{y_2}{n_2}\right]=p_1-p_2$$

κ'

$$V\left[\frac{y_1}{n_1}-\frac{y_2}{n_2}\right]=V\left[\frac{y_1}{n_1}\right]+V\left[\frac{y_2}{n_2}\right]=\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

Από ΚΟΘ:

$$\frac{\left(\frac{y_1}{n_1}-\frac{y_2}{n_2}\right)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\sim N(0,1) \quad \text{(ασυμπτωτικά)}$$

Το ζητούμενο Δ.Ε είναι:

$$\left(\frac{y_1}{n_1}-\frac{y_2}{n_2}\right)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{y_1}{n_1}\left(1-\frac{y_1}{n_1}\right)}{n_1}+\frac{\frac{y_2}{n_2}\left(1-\frac{y_2}{n_2}\right)}{n_2}}\quad \blacksquare$$