PL



**Δ.Ε**: Ζητάμε $LB(\underline{x})$ κι $UB(\underline{x})$ τ.ω.

$$P\left(LB(\underline{x}) < \theta < UB(\underline{x})\right) = 1-a$$

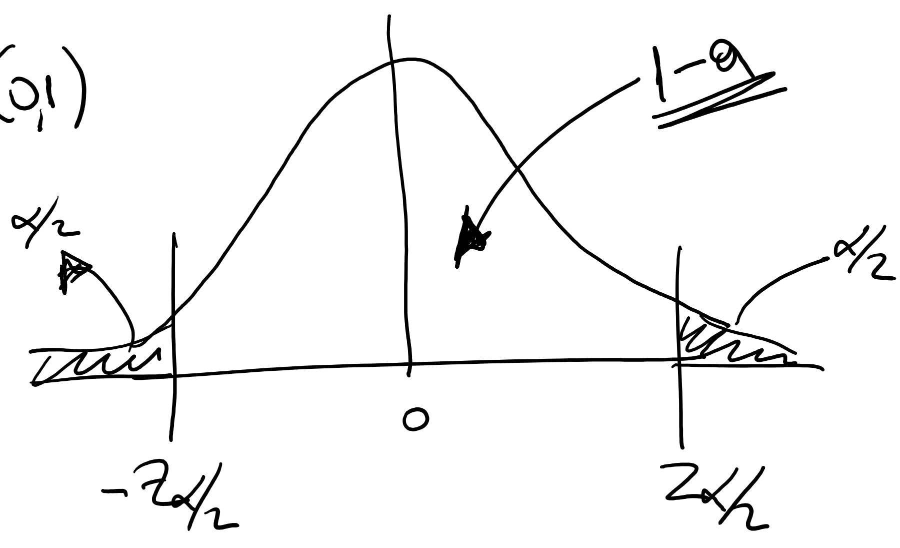
όπου $1-a$ είναι ο συντελεστής εμπιστοσύνης.

**Παρ)** Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ και $\sigma^2$-γνωστό. Να βρεθεί Δ.Ε. για το $\mu$.

Μια καλή εκτιμήτρια του $\mu$ είναι: $\hat{\mu} = \overline{X}$

Το $\overline{X}$ είναι τ.μ. με $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$.

Άρα: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$




Συνεπώς:

$$P\left(-z_{a/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} < z_{a/2}\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

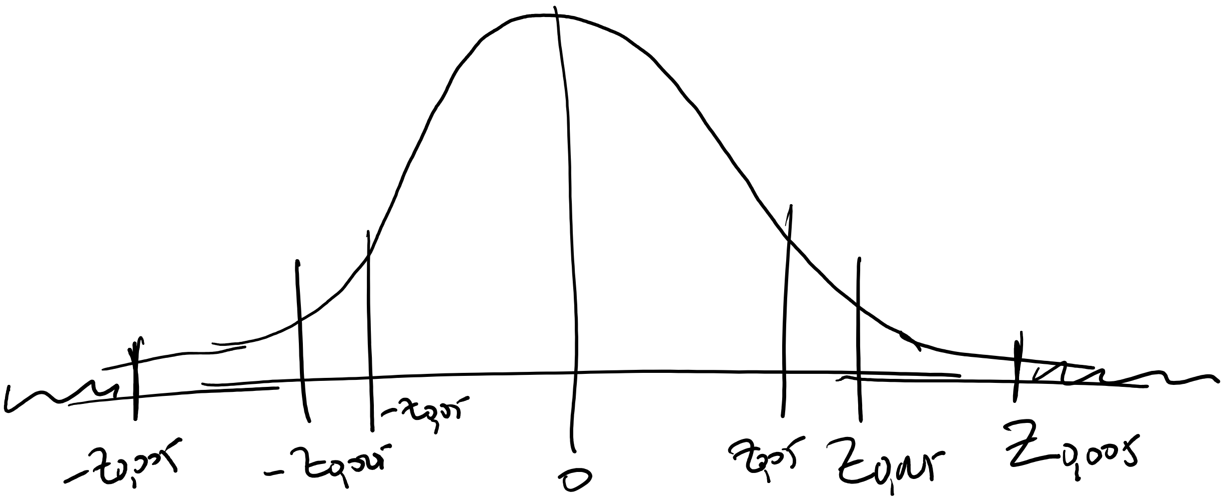
$$\Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu-\bar{X} < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Συνεπώς, ένα $100\cdot(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το $\mu$ είναι το: $\left[\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

<u>ή</u> $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>ΕΡΜΗΝΕΙΑ Δ.Ε.</u>: Αν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές με διαφορετικά δεδομένα και κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα Δ.Ε. για το $\mu$ περιμένουμε ότι στο $100(1-\alpha)\%$ των φορών η πραγματική τιμή του $\mu$ θα περιέχεται στο ΔΕ


0
Z0,005

P2



## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

↳ Έστω $X_1=x_1, \dots, X_\nu=x_\nu$. Τότε ο $\bar{X}=\bar{x}$ είναι γνωστός αριθμός και το Δ.Ε : $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ είναι γνωστό διάστημα, το οποίο περιέχει ή δεν περιέχει το $\mu$.

↳ Όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος $\nu$, το $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ και άρα το μήκος του διαστήματος $2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ μικραίνει.

↳ Για καθορισμένο μέγεθος δείγματος, το μήκος του Δ.Ε. μικραίνει αν ελαττωθεί ο συντελεστής εμπιστοσύνης $(1-\alpha)$.

## Δ.Ε. για άγνωστη παράμετρο $\theta$ του πληθυσμού

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$. Ζητάμε τυχαία όρια $LB(\underline{X})$ κ' $UB(\underline{X})$ τ.ω.

$$P\left(LB(\underline{X}) < \theta < UB(\underline{X})\right) = 1-\alpha.$$

## ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

↳ Έστω $T=T(\underset{\sim}{X})$ είναι μια εκτιμήτρια της παρα-
μέτρου $\theta$

↳ Ψάχνουμε μια τ.μ. $\varphi(T,\theta)$ που να είναι
συνάρτηση του $T$ αλλά και του $\theta$, και η
κατανομή της να είναι ανεξάρτητη του $\theta$
αλλά και τυχόν άλλων αγνώστων παραμέτρων.
Το $\varphi(T,\theta)$ ονομάζεται ποσότητα οδηγός ή
αντιστρέψιμη ποσότητα (pivot ή pivotal
quantity).

↳ Τότε, επιλέγονται σταθερές $c_1$ κ' $c_2$ τ.ω.

$$P(c_1<\varphi<c_2)=1-\alpha \text{ και}$$

λύνονται ως προς $\theta$ τις ανισότητες
καταλήγουμε σε τυχαία όρια $LB(\underline{X})$ κ' $UB(\underline{X})$

τ.ω.: $P(LB(\underline{X})<\theta<UB(\underline{X}))=1-\alpha$.

Στο πχ που κάναμε; έχουμε $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$
με $\sigma^2$-γνωστό. Η εκτιμήτρια του $\mu$, η $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

και: $Z(\bar{X},\mu)=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

με την $N(0,1)$ να είναι γνωστή.

<u>Πχ</u> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu, \sigma^2$ - άγνωστα. Να κατασκευάσετε Δ.Ε. για το $\mu$ με σ.ε. $1-\theta$

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι: $T = \hat{\mu} = \overline{X}$

όπως $\sigma^2$ - άγνωστο. Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$S^2 = \frac{1}{\nu-1} \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2$ είναι α.ε. του $\sigma^2$

Έχουμε: $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$

<u>και</u>: $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$, <u>κ'</u> $\overline{X}, S^2$ ανεξάρτητα.

(*) Αν $Z \sim N(0,1)$ κ' $U \sim \chi^2_r$ κ' $Z, U$ ανεξ.

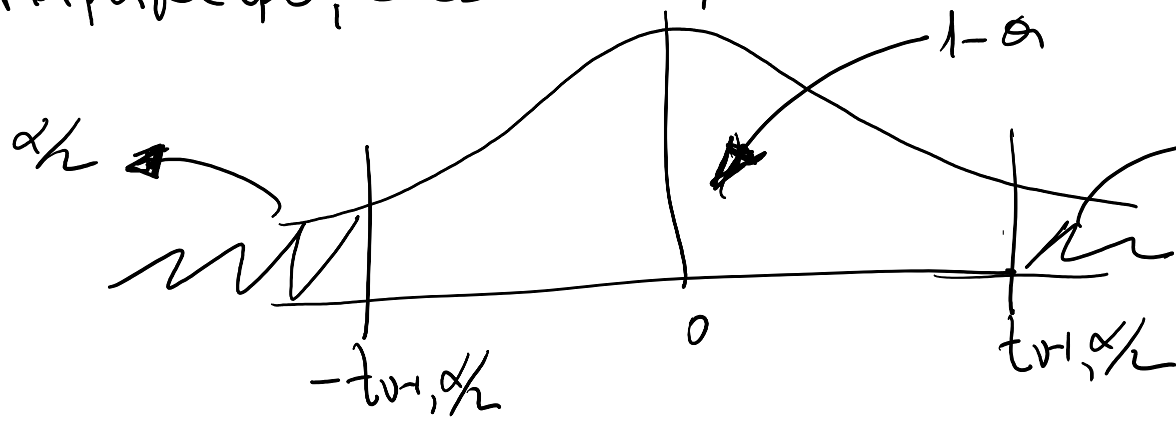
τότε: $W = \frac{Z}{\sqrt{U/r}} \sim t_r$

Επομένως: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$

κ' $U = \dfrac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$ κ' ανεξ.

οπότε:
$$W = \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{(\nu-1)}\cdot S^2}{\sigma^2} \Big/ \cancel{\nu-1}}} = \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\cancel{\sigma}/\sqrt{\nu}}}{S/\cancel{\sigma}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}} \sim t_{\nu-1}$$

Η $t_{\nu-1}$ δεν εξαρτάται από το $\mu$ ή άλλες άγνωστες παραμέτρους. Έχει μια και μοναδική παράμετρο, τους Β.Ε., που είναι γνωστή.




Ψάχνουμε $c_1, c_2$ τέτοια ώστε

$$P(c_1 < W < c_2) = 1-\alpha$$

τα οποία είναι: $c_1 = -t_{\nu-1,\alpha/2}$

$$c_2 = t_{\nu-1,\, \alpha/2}$$

Οπότε: $$P\left(-t_{\nu-1,\, \alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}} < t_{\nu-1,\, \alpha/2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - t_{\nu-1,\, \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}} < \mu < \bar{X} + t_{\nu-1,\, \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}}\right) = 1-\alpha$$

Δ.Ε με συντελεστή $1-\alpha$: $\bar{X} \pm t_{\nu-1,\, \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}}$