Πχ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από Poisson(λ)
Να βρεθεί εκτιμήτρια του λ με τη μέθοδο των ροπών.

Έχουμε: $f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$, $\lambda > 0$

Έχουμε μία άγνωστη παράμετρο. Οπότε, εξισώνω την $E(X)$ με το $\overline{X}$

Άρα: $E(X) = \lambda = \overline{X} \Rightarrow \boxed{\overline{\lambda} = \overline{X}} = \hat{\lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στη μέθοδο των ροπών, αν έχω να εκτιμήσω 2 άγνωστες παραμέτρους, συνήθως εξισώνω το $E(X)$ με το $\overline{X}$, και για δεύτερη εξίσωση παίρνουμε: $V(X) = E[(X-\mu)^2]$ και εξισώνουμε με $\frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2$. Δηλ. μπορώ να έχω:

$E(X) = \overline{X}$ είτε: $E(X) = \overline{X}$

$E(X^2) = \frac{1}{\nu} \cdot \sum X_i^2$ $V(X) = E[(X-\mu)^2] =$

$$E(X^2) = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \qquad V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2$$

Γενικά, για διευκόλυνση στις πράξεις, μπορούμε να πάρουμε τις ροπές περί το μέσο:

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \text{ με τις } M_k = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^k$$

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. $Bin(n,p)$. Να βρεθούν οι εκτιμήτριες ροπών για τα n, p.

Εξισώνουμε: $E(X) = \bar{X} = \mu$ και

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2 = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2 = M_2$$

Άρα: $E(X) = np = \bar{X}$ --- (1)

$V(X) = np(1-p) = M_2$ --- (2)

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{\cancel{np}(1-p)}{\cancel{np}} = \frac{M_2}{\bar{X}} \Rightarrow \bar{p} = 1 - \frac{M_2}{\bar{X}}$$

$\bar{}^{2}$

(1) ~~γρ~~ $\bar{X}$ $\hat{}$

Από (1) $\Rightarrow \bar{n} = \dfrac{\bar{X}}{\bar{p}} = \dfrac{\bar{X}}{1-\frac{M_2}{\bar{X}}} = \dfrac{\bar{X}^2}{\bar{X}-M_2}$

Το n πρέπει να είναι ακέραιος. Όταν είναι άγνωστο και το εκτιμώ, τότε παίρνουμε ως εκτιμήτρια τον πλησιέστερο ακέραιο στο $\bar{n}$.

Όμως, για να ισχύουν $p>0$ ή $n>0$ θα πρέπει: $\bar{X} > M_2$

Αν δεν ισχύει το $\bar{X} > M_2$, τότε προφανώς η διωνυμική <u>δεν</u> είναι το κατάλληλο μοντέλο για να περιγράψει τα δεδομένα μας.

↳ Αν $M_2 \simeq \bar{X}$ τότε ένα υποψήφιο μοντέλο είναι η Poisson, όπου $E(x) = V(x)$

↳ Αν $M_2 > \bar{X}$ τότε ένα μοντέλο μπορεί να είναι η Αρνητική Διωνυμική, αφού ισχύει ότι: $E(x) < V(x)$.

Πχ | Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta} \exp\left\{-\frac{x^3}{\theta}\right\}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

Δείξτε ότι η ΕΜΠ $\hat{\theta}$ του θ είναι α.ε. κ' συνεπής.

Έχουμε: $L(\theta) = f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta)$

$$= \prod_{i=1}^{\nu}\left[\frac{3x_i^2}{\theta} \cdot e^{-x_i^3/\theta}\right] = \frac{3^\nu}{\theta^\nu} \prod_{i=1}^{\nu} x_i^2 \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^3}$$

Παίρνουμε:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \nu \log 3 - \nu \log\theta + \log \prod_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^3$$

και

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\nu}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^3 = 0 \implies$$

$$\implies \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^3 = \nu \implies \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^3}{\nu}.$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\nu}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^3 = \frac{\nu\theta - 2\sum_{i=1}^{\nu} x_i^3}{\theta^3}$$

$$\frac{\quad}{\partial\theta^2} = \frac{\quad}{\theta^2} - \frac{\quad}{\theta^3}\sum_{i=1} \qquad \theta^3$$

<u>και:</u>

$$\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\cancel{\nu}\frac{\sum x_i^3}{\cancel{\nu}} - 2\sum x_i^3}{\left(\frac{\sum x_i^3}{\nu}\right)^3} = -\frac{\nu^3}{\left(\sum x_i^3\right)^2} < 0$$

Άρα μέγιστο!

Για αμεροληψία πρέπει: $E(\hat{\theta}) = \theta$. Άρα:

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^3}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E(x_i^3).$$

Όπου: $E(x^3) = \int_0^\infty x^3 \frac{3x^2}{\theta}\cdot \exp\left\{-\frac{x^3}{\theta}\right\} dx$.

Θέτω: $Y = X^3$. Οπότε:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3})$$

$$= F_X(y^{1/3})$$

<u>Οπότε:</u> $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(y^{1/3}) =$

$$= \frac{1}{3}y^{-2/3}\cdot f_X(y^{1/3})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\cancel{3}} y^{-2/3} \frac{\cancel{3}}{\theta} \cdot \left(y^{1/3}\right)^2 \cdot \exp\left\{-\frac{\left(y^{1/3}\right)^3}{\theta}\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \exp\left\{-y/\theta\right\} \; \cdots \; Exp(1/\theta).$$

Άρα: $Y \sim Exp(1/\theta)$ κ' $E(Y) = \theta$

Συνεπώς: $E(X_i^3) = \theta, \quad i = 1, 2, \dots, \nu$

<u>Οπότε</u>: $E(\hat{\theta}) = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} E(X_i) = \frac{1}{\nu} \cdot \nu\theta = \theta$

άρα είναι α.ε. του θ.

<u>Εναλλακτικά</u>: $Y_i = X_i^3 \sim Exp(1/\theta)$

οπότε: $\sum_{i=1}^{\nu} Y_i = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^3 \sim Gamma(\nu, \frac{1}{\theta})$.

Οπότε: $E\left[\sum_{i=1}^{\nu} Y_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{\nu} X_i^3\right] = \frac{\nu}{1/\theta} = \nu\theta$.

και: $E(\hat{\theta}) = \frac{1}{\nu} E\left[\sum_{i=1}^{\nu} X_i^3\right] = \theta$.

Για συνέπεια, αρκεί να δείξω ότι: $\lim_{\nu \to \infty} V(\hat{\theta}) = 0$

αφού είναι α.ε. του θ.

Έχουμε: $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^3 \sim Gamma(\nu, 1/\theta)$

Άρα: $V(T) = \dfrac{\nu}{(1/\theta)^2} = \nu\theta^2$

Οπότε: $V(\hat{\theta}) = V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^3}{\nu}\right) = V\left(\dfrac{T}{\nu}\right)$

$$= \frac{1}{\nu^2} \cdot V(T) = \frac{1}{\nu^2}\nu\theta^2 = \frac{\theta^2}{\nu}.$$

Επομένως:

$\lim_{\nu\to\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{\nu\to\infty} \dfrac{\theta^2}{\nu} = 0.$ ... άρα Συνεπής!

P3.
Τετάρτη, 1 Δεκεμβρίου 2021 2:22 μμ

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

- Μέχρι τώρα έχουμε μιλήσει για σημειακές εκτιμήτριες.
- Δεν παρέχουν κάποιο τρόπο ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας σχετικά με τη συμπερασματολογία.
- Είναι σαφές ότι από διαφορετικά δείγματα παίρνουμε διαφορετικές εκτιμήσεις.
- Η εκτίμηση από κάποιο συγκεκριμένο δείγμα είναι ίση με την πραγματική τιμή της παραμέτρου με πιθ. 0 ή πολύ κοντά στο μηδέν.

⟹ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Ζητάμε ένα τυχαίο διάστημα, δηλ. διάστημα τα άκρα του οποίου είναι συναρτήσεις των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$, το οποίο να περιέχει την

πραγματική τιμή της παραμέτρου με πιθανό-
τητα πολύ κοντά στη μονάδα.

Δηλ. Ζητάμε $LB(\underset{\sim}{X})$ κ' $UB(\underset{\sim}{X})$ τ.ω.

$$P\big(LB(\underline{X}) < \theta < UB(\underline{X})\big) = 1-\alpha,$$

όπου α συνήθως 1%, 2%, 5% και καλείται
<u>συντελεστής εμπιστοσύνης</u>.