# ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ Ε.Μ.Π.

↳ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ από $f(x;\theta)$, τότε συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_\nu; \theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta)$$

↳ Μεγιστοποίηση της $L(\theta)$ ως προς $\theta$

↳ Αντ' αυτής, παίρνουμε την $l(\theta) = \log L(\theta)$

↳ Η $\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ δίνει ακρότατο στο $\hat{\theta}$

↳ Θα πρέπει: $\left.\dfrac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$ για να είναι μέγιστο.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από Poisson$(\lambda)$.
Να βρεθεί η ΕΜΠ του $\lambda$.

Έχουμε: $f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $\lambda > 0$, $x > 0$

Παίρνουμε: $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!} =$

$\sum^{\nu} x_i$

[illegible] $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} [illegible] \, x_i!$

$$= e^{-\nu\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i!}$$

Επιπλέον: $l(\lambda) = \log L(\lambda) = \log\left[ e^{-\nu\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \right] =$

$$= -\nu\lambda + \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right) \cdot \log\lambda - \log \prod_{i=1}^{\nu} x_i!$$

Παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} l(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[ -\nu\lambda + \left(\sum x_i\right)\log\lambda - \log\prod x_i! \right]$$

$$= -\nu + \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \bar{X}$ — γνωρίζουμε ότι είναι α.ε. του $\lambda$.

Ελέγχουμε: $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} l(\lambda) = -\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\lambda^2}$

και: $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} l(\lambda)\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\hat{\lambda}^2} < 0.$

Pε

Παρασκευή, 26 Νοεμβρίου 2021 1:58 μμ

ΠΧ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από Geom(p), όπου

$f(x;p) = (1-p)^x \cdot p$ , $0 \le p \le 1$ κι $x = 0, 1, 2, \ldots$

Να βρεθεί ΕΜΠ του p.

Έχουμε:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{\nu} (1-p)^{x_i} \cdot p = p^\nu \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$$

Επίσης:

$$\ell(p) = \log L(p) = \nu \log p + \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right) \cdot \log(1-p)$$

Παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial p} \ell(p) = \frac{\partial}{\partial p} \left[\nu \log p + (\Sigma x_i) \cdot \log(1-p)\right]$$

$$= \frac{\nu}{p} - \frac{\Sigma x_i}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \nu \cdot (1-p) - p \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{\nu}{\Sigma x_i + \nu} = \frac{1}{\bar{x}+1}}$$

Επίσης:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \ell(p) = -\frac{\Sigma x_i}{(1-p)^2} - \frac{\nu}{p^2} < 0.$$

**Δείγμα:** $X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \cdots \quad X_\nu$

$X_1$-αποτυχία, 1-επιτυχία

$X_2$-αποτυχία, 1-επιτυχία

$X_\nu$-αποτυχία, 1-επιτυχία

**Άρα:** $$\hat{p} = \frac{\nu}{\sum X_i + \nu} = \frac{\text{αριθ. επιτυχιών}}{\underbrace{\text{αριθ. αποτυχιών} + \text{αριθ. επιτυχιών}}_{\text{όλων δοκιμών.}}}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Εάν η συνάρτηση πιθανοφάνειας έχει $s$-παραμέτρους $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$, τότε η ΕΜΠ του $\underset{\sim}{\theta}$, η $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$, είναι το διάνυσμα $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s)$ για το οποίο μεγιστοποιείται η

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = L(\underset{\sim}{\theta}) = f(x_1, x_2, \dots, x_\nu; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$$

κάτω από ορισμένες συνθήκες ομαλότητας, το σημείο που μεγιστοποιείται η πιθανοφάνεια είναι η λύση των εξισώσεων:

$\partial l(\theta_1, \dots, \theta_s)$

$$\frac{\qquad}{\partial \theta_1} = 0$$

$\vdots$

$$\frac{\partial l(\theta_1, \dots, \theta_s)}{\partial \theta_s} = 0$$

Για να έχουμε μέγιστο θέλουμε (από συνθήκη)

$$\frac{\partial^2 l(\theta_1, \dots, \theta_s)}{\partial \theta_i^2} < 0 \quad , \quad \text{για } i = 1, \dots, s.$$

<u>Πχ</u>) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\theta_1, \theta_2)$.

Να βρεθούν οι ΕΜΠ των $\theta_1, \theta_2$

Έχουμε: $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 < \infty \, , \, 0 < \theta_2 < \infty\}$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; \theta_1, \theta_2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta_2} \cdot (x_i - \theta_1)^2} =$$

$$= (2\pi\theta_2)^{-\nu/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta_2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \theta_1)^2}$$

<u>Παίρνουμε</u>:

$$l(\theta_1, \theta_2) = \log L(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\nu}{2} \log(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \theta_1)^2$$

$$\ell(\theta_1,\theta_2) = \log L(\theta_1,\theta_2) = -\frac{\nu}{2}\log(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2}\cdot\sum_{i=1}(x_i-\theta_1)^2$$

και

$$\frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = \frac{1}{\theta_2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_1)$$

κ'

$$\frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = -\frac{\nu}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_1)^2$$

Θέλουμε:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=0\\ \frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\frac{1}{\theta_2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_1)=0 \quad (1)\\ &-\frac{\nu}{2\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\theta_1)^2=0 \quad (2)\end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i - \sum_{i=1}^{\nu}\theta_1 = 0 \Rightarrow \sum x_i - \nu\theta_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_1 = \frac{\sum x_i}{\nu} = \bar{x}}$$

$$(2) \Rightarrow -\nu + \frac{1}{\theta_2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_2 = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}$$

Από όσα γνωρίζουμε το $\hat{\theta}_1$ είναι α.ε. του μέσου

Από όσα γνωρίζουμε το $\hat{\theta}_1$ είναι α.ε. του μέσου ενώ το $\hat{\theta}_2$ <u>δεν</u> είναι α.ε. της διασποράς.

Άρα: $E(\hat{\theta}_1) = \mu$ κ'

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \sigma^2$$

↳ είναι όμως ασυμπτωτικά αμερόληπτη.

<u>Επίσης</u>:

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1^2} = -\nu < 0$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{2\theta_2^3} < 0$$

<u>κ'</u>

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})}{\theta_2} = -\frac{\sum x_i - \nu\bar{x}}{\theta_2} = 0$$

Άρα παίρνουμε μέγιστο.