P1

Τετάρτη, 24 Νοεμβρίου 2021 12:52 μμ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: Αν T_ν ακολουθία εκτιμητριών της $g(\underline{\theta})$ για την οποία ισχύουν

i) $\lim_{\nu\to\infty} E(T_\nu) = g(\underline{\theta})$ (ασυμπτωτικά αμερόληπτη)

ii) $\lim_{\nu\to\infty} V(T_\nu) = 0$

τότε η T_ν είναι συνεπής εκτιμήτρια του $g(\underline{\theta})$.

Πχ) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$. Ο δειγμ. μέσος είναι πάντα συνεπής εκτιμήτρια της μέσης τιμής της κατανομής του X.

Δηλ. $\mu = E(X)$ έχουμε:

i) $E(\overline{X}) = E(X) = \mu$, άρα α.ε. του μ.

κ'

ii) $V(\overline{X}) = \frac{1}{\nu} V(X)$ και $\lim_{\nu\to\infty} V(\overline{X}) = 0$.

Άρα, $\overline{X}$ συνεπής εκτιμήτρια του μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το κριτήριο της συνέπειας αν χρησιμοποιηθεί μόνο του μπορεί να οδηγήσει σε όχι καλές εκτιμήτριες.

Π.χ.) Αν η T_ν συνεπής, τότε και η

$$T_\nu^* = T_\nu + Q(\nu), \text{ όπου } Q(\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

είναι επίσης συνεπής.

Άρα π.χ. αφού $\overline{X}$ συνεπής, τότε και

$$\overline{X} + \left(\frac{\sqrt[3]{\overline{X}^2}}{\nu}\right)^6 \text{ είναι συνεπής.}$$

Π.χ.) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τδ από $N(\mu, \sigma^2)$.

ΝΔΟ η $S^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2$ είναι α.ε. και συνεπής εκτιμήτρια του σ^2.

i) Αμεροληψία: $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

Άρα: $E\left[\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\right] = \nu - 1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$ <u>α.ε.</u>

$$\left[\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\right] = \nu-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2 \quad \underline{\underline{\text{α.ε.}}}$$

ii) $$V\left[\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\right] = 2(\nu-1) \Rightarrow$$

$$\frac{(\nu-1)^2}{\sigma^4}\cdot V(S^2) = 2(\nu-1) \Rightarrow V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{\nu-1}$$

<u>Οπότε:</u> $$\lim_{\nu\to\infty} V(S^2) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{2\sigma^4}{\nu-1} = 0$$

Άρα, η S^2 συνεπής εκτ. του σ^2.

Πχ | Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $Bin(N,p)$

με σ.π. $f(x;p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$

όπου $x = 0,1,2,\dots,N$

κ' $0 < p < 1$

κ' N-γνωστό.

Να βρεθεί α.ε.ε.δ. του p, και αφού υπολογιστεί το κφ-CR να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα κτλ. Είναι συνεπής επιπλέον,

Έχουμε: $f(x;p) = \binom{N}{x} p^{x} (1-p)^{N-x}$

$$= \binom{N}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x} \cdot (1-p)^{N} =$$

$$= \exp\left\{ x \log\frac{p}{1-p} + N \log(1-p) \right\} \cdot \binom{N}{x}$$

$$= \exp\left\{ T(x) \cdot \eta(p) - B(p) \right\} \cdot h(x)$$

όπου: $T(x) = x$, $\eta(p) = \log\frac{p}{1-p}$

$B(p) = -N\log(1-p)$, $h(x) = \binom{N}{x}$.

Από κοινού:

$$f(\underline{x};p) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} T(x_i)\eta(p) - \nu B(p) \right\} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} h(x_i)$$

όπου η σ.σ. $\sum_{i=1}^{\nu} T(x_i) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i = T^*$

είναι επαρκής κ' πλήρης για το p.

Έχουμε: $T^* = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \sim Bin(\nu N, p)$.

Οπότε: $E(T^*) = \nu N p$ κι $V(T^*) = \nu N p(1-p)$.

Άρα: $E(T^*) = \nu N p \underset{\nu}{\Rightarrow} E\left(\frac{T^*}{\nu N}\right) = p$.

Συνεπώς, η $\frac{T^*}{\nu N} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu N}$ α.ε.ε.δ. του p

ως α.ε. του p και συνάρτηση της επαρκούς

κι πλήρους σ.σ. T^* για το p.

Οπότε: $V\left(\frac{T^*}{\nu N}\right) = \frac{1}{\nu^2 N^2} V(T^*) =$

$$= \frac{1}{\nu^2 N^2} \nu N p(1-p) = \frac{p \cdot (1-p)}{\nu N}.$$

Έχουμε: i) $E\left(\frac{T^*}{\nu N}\right) = p$, α.ε. του p κι

ii) $\lim_{\nu \to \infty} V\left(\frac{T^*}{\nu N}\right) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{p(1-p)}{\nu N} = 0$

Άρα η εκτιμήτρια $\frac{T^*}{\nu N}$ είναι συνεπής.

$$\text{ΚΦ-CR} = \frac{1}{\nu E\left[\left(\frac{\partial}{\partial p} \log f(x;p)\right)^2\right]} = -\frac{1}{\nu E\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log f(x;p)\right]}$$

Έχουμε: $\log f(x;p) = \log\binom{N}{x} + x\log p + (N-x)\log(1-p)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\log f(x;p) = \frac{x}{p} - \frac{N-x}{1-p}$$

κ' $$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(x;p) = -\frac{x}{p^2} - \frac{N-x}{(1-p)^2}$$

Οπότε: $-E\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(x;p)\right] = -E\left[-\frac{x}{p^2} - \frac{N-x}{(1-p)^2}\right]$

$$= \frac{E(x)}{p^2} + \frac{N-E(x)}{(1-p)^2} = \frac{Np}{p^2} + \frac{N-Np}{(1-p)^2} =$$

$$= \frac{N}{p} + \frac{N}{1-p} = \frac{N(1-p)+Np}{p(1-p)} = \frac{N}{p(1-p)}.$$

Οπότε: ΚΦ-CR: $\frac{1}{\nu\cdot\frac{N}{p(1-p)}} = \frac{p(1-p)}{\nu N} = V\left(\frac{T^*}{\nu N}\right).$

Άρα η εκτιμήτρια $\frac{T^*}{\nu N}$ είναι αποτελεσματική.

P2

Τετάρτη, 24 Νοεμβρίου 2021 2:12 μμ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

(Maximum Likelihood Estimation)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από πληθυσμό με σ.π.π. $f(x;\theta)$ (ή σ.π. $p(x;\theta)$). Τότε η συνάρτηση:

$$L(\theta;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = L(\theta)$$

Θεωρείται συνάρτηση της παραμέτρου θ και ονομάζεται <u>συνάρτηση πιθανοφάνειας</u> (likelihood function).

Έστω $L(\underset{\sim}{\theta};\underline{X})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας ενός τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$. Ο εκτιμητής $\underline{\hat{\theta}}$ του $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ λέγεται <u>εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας</u> (ΕΜΠ)

[... likelihood estimator (MLE)]

[maximum likelihood estimator (MLE)]

του $\underline{\theta}$ αν:

$$L(\hat{\underline{\theta}};\underline{x}) = \max_{\underline{\theta}\in\Theta} L(\underline{\theta};\underline{x}).$$

ή

$$\hat{\underline{\theta}} = \arg\max_{\underline{\theta}} (\underline{\theta};\underline{x}).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

→ Για λόγους ευκολίας, αντί να μεγιστοποιήσουμε την $L(\underline{\theta};\underline{x})$, μεγιστοποιούμε την $\log L(\underline{\theta};\underline{x}) = l(\underline{\theta};\underline{x})$ (log-likelihood). την λογό-πιθανοφάνεια, η οποία λαμβάνει μέγιστο στο ίδιο σημείο.

→ Όταν μεγιστοποιούμε την $L(\underline{\theta};\underline{x})$ μπορεί να έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

α • Δεν υπάρχει πεπερασμένο μέγιστο.

β • Υπάρχει μόνο ένα

β • Υπάρχει μόνο ένα

γ • Υπάρχουν περισσότερα από ένα

δ • Κανένα.