Πχ Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ΤΔ από πληθυσμό με σπ. Poisson(θ). Να βρεθεί:

α) Α.Ε.Ε.Δ. της θ. → (το έχουμε δει)

β) Α.Ε.Ε.Δ. εκτιμητή της $g(\theta) = \theta^2$.

Αρκεί να βρούμε α.ε. της θ^2 που να είναι συνάρτηση της $T = T(\underline{x})$ επαρκούς κ' πλήρους σσ.

Γνωρίζουμε ότι: $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$

Επίσης: $E(X_i) = \theta$ και $V(X_i) = \theta$.

και $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim$ Poisson$(\nu\theta)$

Οπότε: $E(T) = \nu\theta$ κ' $V(T) = \nu\theta$.

Όμως: $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \nu\theta$

$$\Rightarrow E(T^2) = \nu\theta + (\nu\theta)^2$$

Συνεπώς:

$$E(T^2) - E(T) = \nu\theta + (\nu\theta)^2 - \nu\theta = (\nu\theta)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{T^2 - T}{\nu^2}\right) = \theta^2.$$

Άρα: $U = \frac{T^2 - T}{\nu^2}$ α.ε. της θ^2 και συνάρτηση της T. Επομένως α.ε.ε.δ. του θ

Υπολογίζουμε την διακύμανση του U. Έχουμε:

$$V(U) = V\left[\frac{T^2-T}{\nu^2}\right] = \frac{1}{\nu^4} V\left[T^2 - T\right] =$$

$$= \frac{1}{\nu^4}\left\{ E\left[(T^2-T)^2\right] - E\left[T^2-T\right]^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\nu^4}\left\{ E(T^4) + E(T^2) - 2E(T^3) - E(T^2)^2 - E(T)^2 + 2E(T^2)\cdot E(T) \right\}$$

Γνωρίζουμε ότι: $E(T) = \nu\theta$ κι $E(T^2) = \nu\theta + (\nu\theta)^2$

Οι ροπές μπορούν να υπολογισθούν είτε με τον ορισμό ή βάσει των παραγώγων της ροπογεννήτριας:

$$M_T(t) = e^{\nu\theta(e^t-1)}$$

Για π.χ. $\frac{d}{dt} M_T(t) = \nu\theta e^t \cdot e^{\nu\theta(e^t-1)}$

και: $\left.\frac{d}{dt} M_T(t)\right|_{t=0} = \nu\theta$.

$2 \quad \ldots \quad + \nu\theta(e^t-1) \quad (\ldots)^2 \, e^{2t} \, e^{\nu\theta(e^t-1)}$

Επίσης: $\frac{d}{dt^2} M_T(t) = \nu\theta e^{t} \cdot e \quad + (\nu\theta) \quad t$

κ' $\left.\frac{d^2}{dt^2} M_T(t)\right|_{t=0} = \nu\theta + (\nu\theta)^2$

⋮

$\underline{\underline{M_n}}$

Μετά από πράξεις, έχουμε:

$$V(U) = \frac{4\theta^3}{\nu} + \frac{2\theta^3}{\nu^2}$$

Συνεπώς, το ΚΦ-CR είναι:

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{\nu I_X(\theta)} = \frac{4\theta^2}{\nu \cdot \frac{1}{\theta}} = \frac{4\theta^3}{\nu}$$

όπου: $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta}$

Οπότε: $V(U) > $ ΚΦ-CR

και αποτελεσματικότητα:

ΚΦ-CR $\quad \frac{4\theta^3}{\nu}$

$$\frac{k\theta - an}{V(U)} = \frac{\frac{4\theta^{2}}{v}}{\frac{4\theta^{3}}{v} + \frac{2\theta^{4}}{v^{2}}}$$

P2

Παρασκευή, 19 Νοεμβρίου 2021 2:00 μμ

Π/Χ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τδ από $N(\mu, \sigma^2=25)$

Να βρεθεί:

α) Το $I_{\underset{\sim}{X}}(\mu)$ (η πληροφορία του δείγματος για το μ)

β) ΝΔΟ το $\overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε: $I_{\underset{\sim}{X}}(\mu) = \nu I_X(\mu)$

$$= \nu E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x;\mu)\right)^2\right]$$

$$= -\nu E\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log f(x;\mu)\right]$$

<u>όπου:</u> $f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 25}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{25}\right\}$

και $\log f(x;\mu) = -\frac{1}{2}\log(50\pi) - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{25}$

Έχουμε:

$$\frac{\partial \log f(x;\mu)}{\partial \mu} = \frac{x-\mu}{25}$$

Άρα: $I_{\underset{\sim}{x}}(\mu) = \nu I_x(\mu) = \nu E\left[\left(\frac{x-\mu}{25}\right)^2\right] =$

$$= \frac{\nu}{5^4} E\left[(x-\mu)^2\right] = \frac{\nu}{5^4}\cdot V(x) = \frac{\nu}{5^4}\cdot 5^2 = \frac{\nu}{25}$$

B) Ζητάμε αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ.

Δηλ. θέλουμε να ικανοποιείται η ισότητα στην ανισότητα CR.

Γνωρίζουμε ότι $\overline{X}$ είναι α.ε. του μ.

και: ΚΦ-CR $= \frac{1}{I_{\underset{\sim}{x}}(\mu)} = \frac{1}{\nu I_x(\mu)} = \frac{1}{\nu/25} = \frac{25}{\nu}$

Επίσης, έχουμε: $V(\overline{X}) = \frac{1}{\nu} V(X) = \frac{25}{\nu}$

Οπότε, ο $\overline{X}$ είναι αποτελεσματικός εκτιμητής του μ.

Εναλλακτικά: $e(\overline{X}) = \frac{\text{κφ-CR}}{V(\overline{X})} = \frac{\frac{25}{\nu}}{\frac{25}{\nu}} = 1$.

Θ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $\delta = \delta(\underline{x})$ εκτιμήτρια της $g(\theta)$. Η δ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $g(\theta)$ α.ν.ν υπάρχει συνάρτηση $k(\theta)$ τ.ω.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x};\theta) = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta) = k(\theta)\left[\delta(\underline{x}) - g(\theta)\right]$$

Πχ (συνέχεια) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τδ. από $N(\mu, 25)$. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ.

Έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x_i;\mu) = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{x_i-\mu}{25} = \frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i - \nu\mu\right)$$

$$= \frac{\nu}{25}\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i - \mu\right] = \frac{\nu}{25}\left[\bar{X} - \mu\right]$$

Άρα, η $\delta(\underline{x}) = \bar{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ (Consistency)

Ως επιθυμητή ιδιότητα των εκτιμητριών θα θέλαμε όσο μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος ν να έχουμε καλύτερη προσέγγιση της παραμέτρου θ.

Ορισμός σύγκλισης

α) Ασθενής σύγκλιση ή σύγκλιση κατά πιθανότητα

Λέμε ότι μια ακολουθία X_ν συγκλίνει κατά πιθανότητα στο X, και γράφουμε:

$X_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{P} X$ εάν $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| \geq \varepsilon) = 0$$

ή $\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| < \varepsilon) = 1$.

β) Ισχυρή ή σχεδόν βέβαιη σύγκλιση

$X_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\text{σ.β.}} X$ εάν: $\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X$ με πιθ. 1.

Ορισμός: Η ακολουθία εκτιμητριών T_ν καλείται "ασθενώς συνεπής" για την παράμετρο θ εάν

$T_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{P} \theta$, $\forall \theta \in \Theta$, και "ισχυρά συνεπής" αν: $T_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\text{σ.β.}} \theta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω T_ν ακολουθία εκτιμητών του παραμέτρου θ. Εάν

i) οι T_ν είναι α.ε. του θ, κ'

ii) $\lim_{\nu\to\infty} V(T_\nu) = 0$

τότε η T_ν είναι (ασθενώς) συνεπής εκτιμήτρια του θ.

Για να είναι η T_ν συνεπής εκτιμήτρια του θ θα πρέπει να ισχύει: $T_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{P} \theta$.

Από την ανισότητα Chebyshev έχουμε:

$$P\left(|T_\nu - E(T_\nu)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_\nu)}{\varepsilon^2}$$

όμως: $E(T_\nu) = \theta$. από το (i) και $V(T_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ από το (ii).

Συνεπώς: $\lim_{\nu \to \infty} P(|T_\nu - \theta| > \varepsilon) = 0$

και άρα: $T_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{P} \theta$.