PL

Τετάρτη, 10 Νοεμβρίου 2021 12:49 μμ

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από Poisson(λ)
Να βρεθεί ο.ε.ε.δ. της $g(\lambda) = \lambda^k$.

Έχουμε δείξει ότι η $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι επαρκής
κ' πλήρης σ.σ. για το λ.
Ζητάμε $\psi(T)$ τ.ω. $E(\psi(T)) = \lambda^k$.

Έχουμε:

$$E(\psi(T)) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi(t) \cdot P(T=t) \quad \text{όπου: } T \sim \text{Poisson}(\nu\lambda)$$

Άρα: $$E(\psi(T)) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi(t) \cdot e^{-\nu\lambda} \frac{(\nu\lambda)^t}{t!} = \lambda^k$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \psi(t) \frac{(\nu\lambda)^t}{t!} = \lambda^k e^{\nu\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \psi(t) \frac{(\nu\lambda)^t}{t!} = \lambda^k \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\nu\lambda)^t}{t!}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \psi(t) \frac{(\nu\lambda)^t}{t!} = \frac{1}{\nu^k} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\nu\lambda)^{t+k}}{t!}$$

$\dots \psi(\dots) \; \nu\lambda \; \dots \psi(\dots) \; (\nu\lambda)^2$

$$\Rightarrow \psi(0) + \psi(1)\frac{\nu\lambda}{1!} + \psi(2)\frac{(\nu\lambda)^2}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\nu^k}\left[\frac{(\nu\lambda)^k}{0!} + \frac{(\nu\lambda)^{k+1}}{1!} + \frac{(\nu\lambda)^{k+2}}{2!} + \cdots\right]$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές του $(\nu\lambda)^t$ και στα 2 μέλη, και έχουμε:

Για $t \geq k$:

$$\frac{\psi(t)}{t!} = \frac{1}{\nu^k}\cdot\frac{1}{(t-k)!} \Rightarrow \psi(t) = \frac{1}{\nu^k}\frac{t!}{(t-k)!}$$

Για $t < k$:

$$\psi(t) = 0.$$

Άρα: $$\psi(T) = \begin{cases} 0, & \text{αν } T < k \\ \frac{1}{\nu^k}\cdot\frac{T!}{(T-k)!}, & \text{αν } T \geq k \end{cases}$$

(*) Για $k=1$, έχουμε:

$$\Rightarrow 1 \quad T! \quad 1\ T = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{} = \bar{X}$$

$$\psi(T) = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{T!}{(T-1)!} = \frac{1}{\nu} \cdot T = \frac{\sum_{i=1} x_i}{\nu} = \bar{X}$$

<u>Πχ</u>) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $U(-\theta, \theta)$

α) ΝΔΟ η εσ. $T = \max\{|X_1|, \dots, |X_\nu|\}$ είναι επαρκής κ' πλήρης για το θ.

β) Να βρεθεί α ΕΕΔ του πλάτους (εύρους) 2θ του διαστήματος καθώς και της διασποράς $\theta^2/3$ των παρατηρήσεων.

Έχουμε: $X_i \sim U(-\theta, \theta)$ με $f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} I(-\theta < x < \theta)$.

α)

<u>ΕΠΑΡΚΕΙΑ</u>: Με παραγοντικό κριτήριο.

$$f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2\theta} \cdot I(-\theta < x_i < \theta) =$$

$$= \frac{1}{(2\theta)^\nu} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(-\theta < x_i < \theta)$$

Ζητάμε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(-\theta < x_i < \theta) = 1$

$$\Leftrightarrow I(-\theta < x_i < \theta) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, \nu$$

$$\Leftrightarrow -\theta < x_i < \theta \quad , \forall i$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x_i| < \theta \quad , \forall i$$

$$\Leftrightarrow \max_i |x_i| < \theta$$

$$\Leftrightarrow I(0 < \max_i |x_i| < \theta) = 1 .$$

Συνεπώς: $f(\underline{x};\theta) = \frac{1}{(2\theta)^\nu} I(0 < \max_i |x_i| < \theta)$

$$= g(T(\underline{x});\theta) \cdot h(\underline{x})$$

όπου: $T(\underline{x}) = \max_i |x_i|$ επαρκής σ.σ. για το θ

<u>ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ $T = \max_i |x_i|$</u>

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\max_i |x_i| \leq t) =$$

$$= P(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu| \leq t) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} P(|x_i| \leq t) = \prod_{i=1}^{\nu} P(-t \leq x_i \leq t)$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \left[F_X(t) - F_X(-t) \right] =$$

$$\frac{t+\theta}{\ldots}$$

$$= \left[F_X(t) - F_X(-t)\right]^\nu \qquad F_X(t) = \frac{t+\theta}{2\theta}$$

$$= \left[\frac{t+\theta}{2\theta} - \frac{-t+\theta}{2\theta}\right]^\nu = \left(\frac{2t}{2\theta}\right)^\nu = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu$$

Επομένως: $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}, \quad 0 < t < \theta$

ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

Πρέπει: $E(g(T)) = 0, \forall \theta$ ισχύει $g(t) = 0, \forall t$

<u>Έχουμε:</u> $E(g(T)) = \int_0^\theta g(t) f_T(t)\, dt =$

$$= \int_0^\theta g(t) \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}\, dt = 0, \quad \forall \theta$$

$$= \int_0^\theta g(t)\, t^{\nu-1}\, dt = 0, \quad \forall \theta$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ:

$$g(\theta) \cdot \theta^{\nu-1} = 0 \Rightarrow g(\theta) = 0, \quad \forall \theta > 0$$

Άρα: $g(t)=0,\ \forall t$, απο $0<t<\vartheta$.

Συνεπώς, η T είναι πλήρης.

β) Ζητάμε $\varphi_1(T)$ κ' $\varphi_2(T)$ τ.ω.

$$E(\varphi_1(T))=2\vartheta \quad \text{κ'} \quad E(\varphi_2(T))=\frac{\vartheta^2}{3}$$

<u>Έχουμε</u>: $E(\varphi_1(T))=\int_0^\theta \varphi_1(t)f_T(t)dt=$

$$=\int_0^\theta \varphi_1(t)\cdot\frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}dt=2\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi_1(t)\cdot t^{\nu-1}dt=\frac{2\theta^{\nu+1}}{\nu}$$

Παραγωγίζουμε ως προς ϑ:

$$\varphi_1(\theta)\theta^{\nu-1}=\frac{2(\nu+1)\cdot\theta^\nu}{\nu}\Rightarrow\varphi_1(\theta)=\frac{2(\nu+1)}{\nu}\vartheta$$

Άρα, η ζητούμενη α.ε.ε.δ. του 2ϑ είναι η

$$\varphi_1(T)=\frac{2(\nu+1)}{\nu}\cdot T=\frac{2\cdot(\nu+1)}{\nu}\cdot\max_i|X_i|.$$

Επίσης: $E(\varphi_2(T))=\frac{\theta^2}{3}\Rightarrow$

$E(\varphi_2(T)) = \frac{\theta^2}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \varphi_2(t) f_T(t)\,dt = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \int_0^{\theta} \varphi_2(t)\cdot t^{\nu-1}\,dt = \frac{\theta^{\nu+2}}{3\nu}$$

Παραγωγίζω ως προς θ:

$$\varphi_2(\theta)\,\theta^{\nu-1} = \frac{\nu+2}{3\nu}\,\theta^{\nu+1} \Rightarrow \varphi_2(\theta) = \frac{\nu+2}{3\nu}\cdot\theta^2$$

Άρα, η ζητούμενη α.ε.ε.δ. είναι:

$$\varphi_2(T) = \frac{\nu+2}{3\nu}\cdot T^2 = \frac{\nu+2}{3\nu}\cdot\left(\max_i |x_i|\right)^2$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κατανομή του $Y=|X|$, όπου $Y \sim U(0,\theta)$.

P2

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ - Ανισότητα Cramer-Rao

Η ανισότητα Cramer-Rao εξασφαλίζει ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες ομαλότητας (π.χ. να μπορώ να αλλάξω τη σειρά ολοκλήρωσης κ' παραγώγισης), η ελάχιστη διασπορά μιας εκτιμήτριας δεν μπορεί να είναι μικρότερη από κάποιο (θετικό) φράγμα, το οποίο προσδιορίζεται από την κατανομή του δείγματος $X_1, \dots, X_n$.

Ορισμός Η ποσότητα

$$I_X(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(\underline{x};\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

ονομάζεται μέτρο πληροφορίας του Fisher που περιέχεται στη $\underline{X}$ για την παράμετρο θ.

Επίσης, η ποσότητα $\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial \theta}$ ονομάζεται score function και έχει μέση τιμή μηδέν:

Έχουμε: $\int f(x;\theta)dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)}{f(x;\theta)} f(x;\theta)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta) \cdot f(x;\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta)\right] = 0.$$

$$\circledast \times \frac{f(x;\theta)}{f(x;\theta)}$$

Επίσης παραγωγίζοντας ακόμα μια φορά:

$$\int \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta)\, f(x;\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta)\, \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)\right] dx = 0$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta)\right] + E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta)\right)^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta)\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta)\right]$$

Συνεπώς, η πληροφορία του fisher μπορεί να γραφεί.

$$I_X(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta)\right]$$