PL

Παρασκευή, 5 Νοεμβρίου 2021 1:14 μμ

Παρ] Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από Bernoulli(θ).

$$f(x;\theta) = \theta^x \cdot (1-\theta)^{1-x}, \quad x=0,1, \quad 0<\theta<1$$

Γνωρίζουμε: $E(X_i)=\theta$ κι $V(X_i) = \theta\cdot(1-\theta)$

Έχουμε: $E(X_1)=\theta$

και έχουμε δείξει ότι: $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ επαρκής σ.σ. για το θ

Σύμφωνα με R-B η τ.μ.

$W = E(X_1 | T=t)$ είναι α.ε. του θ

κι να έχει μικρότερη διασπορά από $V(X_1)$

Γνωρίζουμε ότι $T=\sum X_i \sim Bin(\nu,\theta)$

άρα η T παίρνει τιμές $0 \le t \le \nu$

Για $1 \le t \le \nu$:

$$E[X_1|T=t] = \sum_{x_1=0}^{1} x_1 P(X_1=x_1|T=t) =$$

$$= 0\cdot P(X_1=0|T=t) + 1\cdot P(X_1=1|T=t)$$

$$= P(X_1=1|T=t) =$$

$$= P(X_1=1 \mid T=t) =$$

$$= \frac{P(X_1=1, T=t)}{P(T=t)} = \frac{P(X_1=1)\cdot P\left(\sum_{i=2}^{\nu} X_i = t-1\right)}{P(T=t)} =$$

$$= \frac{\cancel{\theta}\binom{\nu-1}{t-1}\cancel{\theta^{t-1}}\cdot\cancel{(1-\theta)^{(\nu-1)-(t-1)}}}{\binom{\nu}{t}\cancel{\theta^{t}}\cdot\cancel{(1-\theta)^{\nu-t}}} = \frac{\binom{\nu-1}{t-1}}{\binom{\nu}{t}} = \frac{t}{\nu}$$

Για $t=0$: $E(X_1 \mid T=0) = \sum_{x_1=0}^{1} x_1 \cdot P(X_1=x_1 \mid T=0)$

$$= 0\, P(X_1=0 \mid T=0) + 1\cdot P(X_1=1 \mid T=0) = 0$$

Συνεπώς: $E(X_1 \mid T=t) = \frac{t}{\nu} = \frac{\sum X_i}{\nu} = \overline{X}$ για $1 \le t \le \nu$

Άρα: $W = E(X_1 \mid T=t) = \overline{X}$

με: $E(W) = E(\overline{X}) = \theta$

κι $V(W) = V(\overline{X}) = \frac{\theta\cdot(1-\theta)}{\nu} < \theta\cdot(1-\theta) = V(X_1)$

P2

Παρασκευή, 5 Νοεμβρίου 2021 1:51 μμ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η σ.σ. $T_1(X_\nu, \sum_{i=1}^{\nu-1} X_i)$ είναι επίσης επαρκής σ.σ. για το θ. Από Θ. R-B η $W_1 = E(X_1 | T_1)$ είναι επίσης α.ε. του θ και

$V(W_1) \leq V(X_1)$

Από τις δύο α.ε. $W = E(X_1 | T)$
κι' $W_1 = E(X_1|T_1)$

ποια επιλέγουμε?

Έχουμε: $E(W) = E(W_1) = \theta$.

$t_1 = (x_\nu, t_0)$

$$E(X_1 | T_1 = t_1) = \sum_{0}^{1} x_1 \cdot P(X_1 = x_1 | T_1 = t_1) =$$

$$= P(X_1 = 1 | T_1 = t_1)$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, X_\nu = x_\nu, \sum_{i=2}^{\nu-1} X_i = t_0 - 1)}{P(X_\nu = x_\nu, \sum_{i=1}^{\nu-1} X_i = t_0)}, \quad t_0 \geq 1$$

$$= \frac{P(X_1 = 1) \cdot \cancel{P(X_\nu = x_\nu)} \cdot P(\sum_{i=2}^{\nu-1} X_i = t_0 - 1)}{\cancel{P(X_\nu = x_\nu)} \cdot P(\sum_{i=1}^{\nu-1} X_i = t_0)} =$$

$$P(\cancel{X_\nu = x_\nu}) \cdot P\left(\sum_{i=1}^{\cdot} X_i = t_0\right)$$

$$= \frac{\cancel{\theta}\binom{\nu-2}{t_0-1}\cdot \cancel{\theta^{t_0-1}} \cdot \cancel{(1-\theta)^{(\nu-2)-(t_0-1)}}}{\binom{\nu-1}{t_0}\cdot \cancel{\theta^{t_0}} \cdot \cancel{(1-\theta)^{\nu-1-t_0}}} =$$

$$= \frac{\binom{\nu-2}{t_0-1}}{\binom{\nu-1}{t_0}} = \frac{t_0}{\nu-1}$$

Όπως: $W_1 = E(X_1 | T_1 = t_1)$ είναι α.ε. του θ.

αφού: $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu-1} X_i}{\nu-1}\right) = \theta$

<u>και</u>: $V(W_1) = V\left[E(X_1|T_1)\right] =$

$$= V\left(\frac{1}{\nu-1}\cdot\sum_{i=1}^{\nu-1} X_i\right) = \frac{1}{(\nu-1)^2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu-1} V(X_i) = \frac{1}{\nu-1}\theta(1-\theta)$$

Συνεπώς:

$$V(W_1) = \frac{\theta\cdot(1-\theta)}{\nu-1} > \frac{\theta\cdot(1-\theta)}{\nu} = V(W).$$

Προτιμούμε την ω !

P3

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ^2 - άγνωστα. Έστω $S^2 = \frac{1}{\nu-1} \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \bar{X})^2$ α.ε. του σ^2. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς C έτσι ώστε η $C \cdot S^2$ να είναι εκτιμήτρια ελάχιστου ΜΤΣ.

Το ΜΤΣ εκτιμήτριας Y της παραμ. θ.

είναι: $MSE = E\left[(Y-\theta)^2\right] = V(Y) + b^2(\theta)$

όπου: $b(\theta) = E(Y) - \theta$.

Ζητάμε το C ε.ω. το $E\left[(cS^2 - \sigma^2)^2\right]$ να είναι ελάχιστο.

Οπότε: $E\left[(cS^2-\sigma^2)^2\right] = V(cS^2) + \left[E(cS^2-\sigma^2)\right]^2$

$= c^2 V(S^2) + \left[E(cS^2) - \sigma^2\right]^2 =$

$= c^2 \cdot V(S^2) + \left[c\sigma^2 - \sigma^2\right]^2$

$$= c^2 V(S^2) + \sigma^4 \cdot (c-1)^2 \quad \text{--- } (*)$$

Γνωρίζουμε ότι: $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

Άρα: $V\left[\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\right] = 2(\nu-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(\nu-1)^{\cancel{2}}}{\sigma^4} \cdot V(S^2) = 2\cancel{(\nu-1)} \Rightarrow V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{\nu-1}$$

Οπότε: $(*) \Rightarrow E\left[(cS^2-\sigma^2)^2\right] = c^2 \frac{2\sigma^4}{\nu-1} + \sigma^4 \cdot (c-1)^2.$

Παραγωγίζω και θέτω ίσο με μηδέν.

$$2c \frac{2\sigma^4}{\nu-1} + 2\sigma^4 \cdot (c-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2c + (c-1)\cdot(\nu-1)}{\nu-1} = 0 \Rightarrow c = \frac{\nu-1}{\nu+1}$$

Η 2η παράγωγος είναι > 0

Συνεπώς, η σ.σ. $\frac{\nu-1}{\nu+1} \cdot S^2 = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$

είναι εκτιμήτρια ελάχιστου MSE για το σ^2.

P4

Παρασκευή, 5 Νοεμβρίου 2021 2:37 μμ

Μη-μαθηματική διατύπωση του Θ. R-B

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $f(x;\theta)$. Αν η $U = U(\underline{x})$ είναι α.ε. του $g(\theta)$ και η $T = T(\underline{x})$ είναι επαρκής σ.σ. για το θ, τότε η σ.σ. $\delta(\underline{x}) = \psi(T(\underline{x})) = E(U|T)$ είναι α.ε. του $g(\theta)$ και: $V(\delta(\underline{x})) \leq V(U(\underline{x}))$.

Θ. του Lehmann-Scheffé

Έχουμε τις προϋποθέσεις του Θ. R-B. και επιπλέον έχουμε ότι $T = T(\underline{x})$ είναι και πλήρης. Τότε η $\delta(\underline{x}) = \psi(T(\underline{x})) = E[U|T]$ είναι α.ε.ε.δ. του $g(\theta)$.

Έστω $\psi_0(T)$ και $\psi_1(T)$ συναρτήσεις της επαρκούς κ' πλήρους σ.σ. T. Επίσης $\psi_0(T)$ κ' $\psi_1(T)$ είναι α.ε. του $g(\theta)$, δηλ.

$$E(\varphi_0(T)) = E(\varphi_1(T)) = g(\theta)$$

Οπότε, έχουμε: $E[\varphi_0(T) - \varphi_1(T)] = 0, \ \forall \theta \in \Theta$

Επειδή η T είναι πλήρης, έχουμε:

$$\varphi_0(t) - \varphi_1(t) = 0, \quad \forall t$$

<u>Άρα:</u> $\varphi_0(t) = \varphi_1(t)$

α.ε. του $g(\theta)$, T επαρκής κ' πλήρης

⊛ Αν πάρω συνάρτηση της επαρκούς κ' πλήρους σ.σ. T για το θ η οποία είναι α.ε. του θ, τότε αυτή είναι η α.ε.ε.δ. για το θ.