P1

ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ (Completeness)

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από κατανομή $f(x;\theta)$. Έστω ότι η $T = T(\underset{\sim}{x})$ είναι μια επαρκής σ.σ για το θ με σ.π. $h_T(t;\theta)$ και $\{h(t;\theta); \theta \in \Theta\}$ η οικογένεια κατανομών αυτής της μορφής. Ας υποθέσουμε ότι $g(T)$ είναι μια συνάρτηση της επαρκούς σσ T. Εάν η συνθήκη $E[g(T)] = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ συνεπάγεται ότι $g(t) = 0$, $\forall t$ [εκτός από ορισμένα σημεία που αποτελούν ένα σύνολο N_0 μηδενικού μέτρου, δηλ. $P(T \in N_0) = 0$] τότε η T καλείται πλήρης κ' επαρκής σ.σ. για το θ και η οικογένεια κατανομών $\{h(t;\theta); \theta \in \Theta\}$ καλείται πλήρης.

Πχ/ Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από Poisson(θ). Να βρεθεί επαρκής κ' πλήρης σ.σ. για το θ.

Γνωρίζουμε ότι $T=\sum X_i$ είναι επαρκής σ.σ. για το ϑ.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $T \sim Poisson(\nu\vartheta)$

δηλ. $h_T(t;\vartheta) = e^{-\nu\vartheta} \dfrac{(\nu\vartheta)^t}{t!}$, $t=0,1,2,\ldots$

Έστω $g(T)$ συνάρτηση του T

$$E(g(T)) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) \cdot h_T(t;\vartheta) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) e^{-\nu\vartheta} \frac{(\nu\vartheta)^t}{t!}$$

Για κάθε $\vartheta>0$ έχουμε:

$$E(g(T)) = 0 \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} g(t) e^{-\nu\vartheta} \frac{(\nu\vartheta)^t}{t!} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\nu\vartheta} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} g(t) \frac{(\nu\vartheta)^t}{t!} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\nu\vartheta}\left[g(0) + g(1)\frac{\nu\vartheta}{1} + g(2)\frac{(\nu\vartheta)^2}{2!} + \ldots\right] = 0$$

Επειδή: $e^{-\nu\vartheta} \neq 0$, έχουμε:

$$g(0) + g(1) \cdot \nu\vartheta + g(2)\frac{(\nu\vartheta)^2}{2} + \ldots = 0$$

Σε μια κάποια σειρά απείρων όρων που συγκλίνει στο μηδέν για όλα τα $\theta > 0$, θα πρέπει ο κάθε ένας από τους συντελεστές να είναι ίσος με το μηδέν. Συνεπώς:

$$g(0) = 0$$

$$g(1) \cdot \nu = 0 \Rightarrow g(1) = 0$$

$$g(2) \frac{\nu^2}{2} = 0 \Rightarrow g(2) = 0$$

$$\vdots$$

Άρα, $g(t) = 0$, $\forall\, t = 0, 1, 2, \dots$

Επομένως η T είναι <u>και</u> πλήρης.

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από Bernoulli(p).
Να βρεθεί επαρκής κ' πλήρης σ.σ. για το p.
Μπορούμε να δείξουμε ότι: $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$
είναι επαρκής σ.σ. για το p.

Επίσης, $T \sim Bin(\nu, p)$

δηλ. $h_T(t;p) = \binom{\nu}{t} \cdot p^t \cdot (1-p)^{\nu-t}$, $t = 0,1,2,\dots,\nu$

Έστω $g(T)$ συνάρτηση του T

$$E(g(T)) = \sum_{t=0}^{\nu} g(t) \cdot \binom{\nu}{t} p^t \cdot (1-p)^{\nu-t}$$

$$= (1-p)^{\nu} \cdot \sum_{t=0}^{\nu} g(t) \binom{\nu}{t} z^t$$

όπου: $z = \frac{p}{1-p}$ με $z \in (0, \infty)$.

Έχουμε: $E(g(T)) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\nu} g(t) \binom{\nu}{t} \cdot z^t = 0$$

Έχουμε πολυώνυμο ως προς z, το οποίο πρέπει να παίρνει την τιμή 0 για κάθε $z \in (0, \infty)$. Συνεπώς, κάθε ένας από τους συντελεστές πρέπει να είναι 0.

Δηλ. $g(t) = 0, \ \forall \ t = 0, 1, 2, \ldots, \nu$.

Επομένως η T είναι επαρκής κ' πλήρης

και η οικογένεια $h_T(t; p)$ είναι πλήρης,

όπου $0 < p < 1$.

P2

Παρασκευή, 29 Οκτωβρίου 2021 1:50 μμ

<u>Ορισμός</u>: Η τ.μ. $\underset{\sim}{Y}$ με σ.π. $f_Y(\underline{y};\underline{\theta})$ ή η οικογένεια κατανομών $\mathcal{F} = \{ f_Y(\underline{y};\underline{\theta}); \underset{\sim}{\theta} \in \Theta \}$ καλείται πλήρης εάν για κάθε συνάρτηση $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, η σχέση

$$E[g(\underset{\sim}{Y})] = 0, \ \forall \ \underset{\sim}{\theta} \in \Theta$$

συνεπάγεται ότι: $g(\underline{y}) = 0, \ \forall \ \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^k \setminus N_0$

όπου N_0 είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, δηλ. $P(\underline{Y} \in N_0) = 0, \ \forall \ \underset{\sim}{\theta} \in \Theta$.

<u>Πχ</u> Να εξετασθεί αν η οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{ f(x;\theta); \theta \in \Theta \}$$

είναι πλήρης ή όχι στις περιπτώσεις

i) $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta - \alpha} I(\alpha < x < \theta)$, $\alpha < x < \theta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\alpha, +\infty)$.

ii) $f(x;\theta) = \frac{1}{\beta-\theta} I(\theta<x<\beta)$, $\theta<x<\beta$
$\beta \in \mathbb{R}$
$\theta \in (-\infty, \beta)$.

iii) $f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} I(-\theta<x<\theta)$, $-\theta<x<\theta$
$\theta \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

i). Για να είναι η F πλήρης, αν $g(X)$ μια συνάρτηση του X, θα πρέπει η $E[g(X)]=0, \forall\theta$ να συνεπάγεται $g(x)=0, \forall x$.

Έχουμε: $E(g(X))=0 \Rightarrow \int_a^\theta g(x)\frac{1}{\theta-a}dx=0$, $\forall\theta>a$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta-a}\int_a^\theta g(x)\,dx=0, \quad \forall\theta>a$$

$$\Rightarrow \int_a^\theta g(x)\,dx=0, \quad \forall\theta>a.$$

Από το 1° Θεμ. Θεωρ. του απειροστικού

Έστω: $F(\theta)=\int_{\alpha}^{\theta} g(x)dx$

Παραγωγίζουμε ως προς θ. και έχουμε

$F'(\theta)=g(\theta)=0\ ,\ \forall\ \theta>\alpha$

Όμως $x\in(\alpha,\theta)$, οπότε $g(x)=0,\ \forall\ x\in(\alpha,\theta)$

Συνεπώς είναι πλήρης.

ii) Ομοίως

iii) Η f δεν είναι πλήρης. Έστω $g(x)=x$

Έχουμε: $E(g(x))=\int_{-\theta}^{\theta} x\frac{1}{2\theta}dx=\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x dx=0$

Οπότε: $E(g(x))=0$ χωρίς η $g(x)$ να είναι μηδενική. Άρα δεν είναι πλήρης.

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τδ από $U(0,\theta)$. Να βρεθεί επαρκής κ' πλήρης σ.σ για το θ.

Επαρκεια: Παραγοντικό κριτήριο έχουμε:

$$f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\theta} \cdot I(0<x_i<\theta) =$$

$$= \theta^{-\nu} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(0<x_i<\theta).$$

Σημείωσε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(0<x_i<\theta) = 1$

$$\Leftrightarrow I(0<x_i<\theta) = 1 \quad , \forall i$$

$$\Leftrightarrow 0<x_i<\theta \quad , \forall i$$

$$\Leftrightarrow 0 < X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(\nu)} < \theta.$$

$$\Leftrightarrow I(0<X_{(1)}<\infty) \cdot I(0<X_{(\nu)}<\theta) = 1$$

Συνεπώς:

$$f(\underline{x};\theta) = \theta^{-\nu} \cdot I(0<X_{(1)}<\infty) \cdot I(0<X_{(\nu)}<\theta)$$

όπου: $h(\underline{x}) = I(0 < X_{(1)} < \infty)$

κ' $g(T(\underline{x});\theta) = \theta^{-\nu} \cdot I(0 < X_{(\nu)} < \theta)$.

Άρα: $T(\underline{x}) = X_{(\nu)}$ επαρκής σ.σ. για το θ.

Χρειαζόμαστε τη κατανομή της $T = T(\underline{x}) = X_{(\nu)}$

Δουλεύουμε με την αθροιστική.

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(X_{(\nu)} \le t) =$$

$$= P(X_1, X_2, \ldots, X_\nu \le t) =$$

$$= P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \ldots P(X_\nu \le t)$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} F(x_i;\theta) = [F_X(t)]^\nu$$

όπου: $X \sim U(0,\theta)$. Άρα:

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} dx = \frac{t}{\theta}$$

Επομένως: $F_T(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu$

Οπότε: $h_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu = \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}$.

Για πληρότητα έχουμε:

$$E_\theta(g(t)) = 0 \ , \ \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(t)\frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu} dt = 0 \ , \ \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(t) t^{\nu-1} dt = 0 \ , \ \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow G(\theta) = \int_0^\theta g(t) t^{\nu-1} dt = 0 \ , \ \forall \theta > 0$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ, και έχουμε:

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = g(\theta)\cdot\theta^{\nu-1} = 0, \ \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow g(\theta) = 0 \ , \ \forall \theta > 0$$

Άρα: $g(t) = 0 \ , \ \forall t \in (0, \theta)$

Συνεπώς, η T είναι πλήρης.

P4.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}, \quad \theta > 0, \quad x > \theta$$

ΝΔΟ η $T = X_{(1)} = \min_i X_i$ είναι επαρκής κ' πλήρης για το θ.

(*) Το σύνορο εξαρτάται από το θ, άρα όχι ΕΟΚ. Θα δουλέψουμε με το παραγοντικό κριτήριο.

Έχουμε: $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) =$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{\theta}{x_i^2} I(\theta < x_i < \infty) =$$

$$= \frac{\theta^\nu}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\theta < x_i < \infty)$$

Ζητάμε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(\theta < x_i < \infty) = 1$

$$\Leftrightarrow I(\theta < x_i < \infty) = 1, \ \forall i$$

$$\Leftrightarrow \theta < x_i < \infty, \ \forall i$$

$$\Leftrightarrow \theta < X_{(1)} < \infty$$

Συνεπώς: $f(\underline{x};\theta) = \dfrac{\theta^{\nu}}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i^2} \cdot I(\theta < X_{(1)} < \infty)$

$$= h(\underline{x}) \cdot g(T(\underline{x});\theta)$$

όπου: $g(T(x);\theta) = \theta^{\nu} \cdot I(\theta < X_{(1)} < \infty)$

ή $h(\underline{x}) = 1 / \prod_{i=1}^{\nu} x_i^2$

Συνεπώς: $T = T(\underline{x}) = X_{(1)}$ επαρκής σ.σ.

Επίσης, έχουμε:

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(X_{(1)} \le t) =$$

$$= 1 - P(X_{(1)} > t) = 1 - P(X_1, X_2, \ldots, X_{\nu} > t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t) \cdots P(X_{\nu} > t)$$

$$= 1 - [1 - P(X_1 \le t)] \cdots [1 - P(X_{\nu} \le t)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{\nu} [1 - P(X_i \le t)] =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{\nu} [1 - F_X(t)] = 1 - [1 - F_X(t)]^{\nu}$$

Έχουμε:

$$F_X(t)=\int_\theta^t f(x;\theta)\,dx=\int_\theta^t \frac{\theta}{x^2}\,dx=$$

$$=\theta\left[-\frac{1}{x}\right]_\theta^t=1-\frac{\theta}{t}$$

Συνεπώς: $F_T(t)=1-\left[1-F_X(t)\right]^\nu=$

$$=1-\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{\theta}{t}\right]^\nu=1-\left(\frac{\theta}{t}\right)^\nu$$

Και

$$f_T(t)=f_{X_{(1)}}(t)=\frac{d}{dt}F_T(t)=\frac{\nu\theta^\nu}{t^{\nu+1}}$$

Έστω τώρα $g(T)$ συνάρτηση του T.

$$E\left[g(T)\right]=\int_\theta^\infty g(t)\cdot f_T(t)\,dt=\int_\theta^\infty g(t)\,\frac{\nu\theta^\nu}{t^{\nu+1}}\,dt=$$

$$=\int_\theta^\infty g(t)\,t^{-(\nu+1)}\,dt=0,\ \forall\,\theta>0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ, έχουμε:

$$-g(\theta)\cdot\theta^{-(\nu+1)}=0 \quad \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow g(\theta)=0, \quad \forall\theta>0$$

Οπότε: $g(t)=0, \quad \forall t>0$

Συνεπώς, η T είναι πλήρης για το θ.