# P1

Τετάρτη, 27 Οκτωβρίου 2021 1:20 μμ

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή ΕΟΚ.

Υπάρξη επαρκούς σ.σ. ?

---

Έστω $X_j \sim$ ΕΟΚ, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ με $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$.

Τότε: $$f_{X_j}(x_j; \underline{\theta}) = b(\underline{\theta}) \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1}^{s} \eta_i(\underline{\theta}) \cdot T_i(x_j) \right\} \cdot h(x_j)$$

Η από κοινού κατανομή του $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_\nu)$ ανήκει στην $\nu$-διάστατη, $s$-παραμετρική ΕΟΚ.

Οπότε: $$f_{\underline{X}}(\underline{x}; \underline{\theta}) = \prod_{j=1}^{\nu} f(x_j; \underline{\theta})$$

$$= \left[ b(\underline{\theta}) \right]^{\nu} \cdot \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{s} \eta_i(\underline{\theta}) T_i(x_j) \right\} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} h(x_j)$$

$$= b^*(\underline{\theta}) \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1}^{s} \eta_i(\underline{\theta}) \cdot T_i^*(\underline{x}) \right\} \cdot h^*(\underline{x})$$

όπου: $$b^*(\underline{\theta}) = \left[ b(\underline{\theta}) \right]^{\nu}$$

$$T_i^*(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{\nu} T_i(x_j)$$

κ' $$h^*(\underline{x}) = \prod_{j=1}^{\nu} h(x_j)$$

Άρα ισχύει το παραγοντικό κριτήριο του Neyman

και $\underline{T}^*(\underline{x}) = \left(T_1^*(\underline{x}), T_2^*(\underline{x}), \ldots, T_s^*\right)$

είναι επαρκής για το $\underline{\theta}$. $\blacksquare$

P2

Τετάρτη, 27 Οκτωβρίου 2021 1:48 μμ

**ΠΟΡΙΣΜΑ:** Έστω $\underline{\varphi}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ και $\underline{\omega}: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ και $\varphi, \omega$ είναι δύο συναρτήσεις κανονικά ορισμένες ώστε να υπάρχουν οι αντίστροφες $\varphi^{-1}$ & $\omega^{-1}$.

Αν η σ.σ. $\underline{T}$ είναι επαρκής για την παράμετρο $\underline{\theta}$, τότε:

1) Η $\underline{T}_1 = \varphi(\underline{T})$ είναι επαρκής σ.σ. για την $\underline{\theta}$

2) Η $\underset{\sim}{T}$ είναι επαρκής για την $\underline{\theta}_1 = \omega(\underline{\theta})$.

Επειδή η $\underset{\sim}{T}$ επαρκής για το $\underline{\theta}$:

2) Έχουμε: $f(\underline{x};\underline{\theta}) = g(\underline{T}(\underline{x});\underline{\theta})h(\underline{x})$

$$= g(\underline{T}(\underline{x}); \omega^{-1}(\underline{\theta}_1)) \cdot h(\underline{x})$$

$$= g_2(\underline{T}(\underline{x}); \underline{\theta}_1) \cdot h(\underline{x})$$

Συνεπώς η $\underset{\sim}{T}$ είναι επαρκής σ.σ. για την $\underline{\theta}_1$.

1) Έχουμε: $f(\underline{x};\underline{\theta}) = g(\underline{T}(\underline{x});\underline{\theta}) \cdot h(\underline{x})$

$$= g\left(\psi^{-1}(\underline{T}_1(\underline{x}));\underline{\theta}\right)\cdot h(\underline{x})$$

$$= g_1\left(\underline{T}_1(\underline{x});\underline{\theta}\right)\cdot h(\underline{x})$$

Οπότε η $\underline{T}_1(\underline{x})$ είναι επαρκής σ.σ. για το $\underline{\theta}$. $\boxtimes$

Πχ) Έστω η σ.σ. $T=\sum X_i$ είναι επαρκής για το $\theta$, τότε:

1) η σ.σ. $\overline{X}=\frac{\sum X_i}{\nu}=\frac{T}{\nu}$ είναι επαρκής για το $\theta$

2) η $T$ είναι επαρκής για $\theta^3, 2\theta, k\theta, \log\theta, e^\theta$

Πχ: για τις $\overline{X}^2, |\overline{X}|$ δεν γνωρίζουμε αν είναι επαρκής σ.σ. για το $\theta$

αφού επίσης η $T$ δεν γνωρίζουμε αν είναι επαρκής για την $\theta^2$.

Ελάχιστη επάρκεια

Ια. → ορισμός

1β -> Παραγοντικό κριτήριο

1γ -> Ε.Ο.Κ.

P3

Τετάρτη, 27 Οκτωβρίου 2021 2:13 μμ

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $U(0,\theta)$. Να βρεθεί επαρκής σ.σ. για το $\theta$.

Έχουμε: $X \sim U(\alpha, \beta)$ με $f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha}$

όπου $\alpha < x < \beta$

Άρα:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ή

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot I(\alpha < x < \beta)$$

όπου:

$$I(\alpha < x < \beta) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς, αν $X \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$ άγνωστο

Τότε: $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I(0 < x < \theta)$.

Δεν ανήκει στην ΕΟΚ. Θα δουλέψουμε με το παραδοσιακό κριτήριο.

Η σ.π.π. του τ.δ. από την $U(0,\theta)$ είναι:

$$f(\underline{x};\theta) = f(x_1,\theta)\cdots f(x_\nu;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\theta}\cdot I(0<x_i<\theta) = \theta^{-\nu}\cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(0<x_i<\theta).$$

Ζητάμε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(0<x_i<\theta) = 1$ αλλιώς $f(\underline{x};\theta)=0$.

Θέλουμε να ισχύει: $I(0<x_i<\theta)=1 \quad \forall i=1,\dots,\nu$

$\iff x_i \in (0,\theta), \ \forall i=1,\dots,\nu$

$\iff 0 < x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(\nu)} < \theta$

όπου: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(\nu)}$ διατεταγμένα στατιστικά

όπου: $x_{(1)} = \min_i(x_i)$ κι $x_{(\nu)} = \max_i(x_i)$.

Επομένως ζητάμε: $I(0<x_{(1)}<+\infty)\cdot I(0<x_{(\nu)}<\theta) = 1$

Οπότε: $f(\underline{x};\theta) = \theta^{-\nu} I(0<x_{(1)}<+\infty)\cdot I(0<x_{(\nu)}<\theta)$

$$= g(T(\underline{x});\theta)\cdot h(\underline{x})$$

όπου: $g(T(\underline{x});\theta) = \theta^{-\nu}\cdot I(0<x_{(\nu)}<\theta)$

κι $h(\underline{x}) = I(0<x_{(1)}<+\infty)$.

Άρα, η $T=T(\underline{x}) = X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ.

για το $\theta$.

Εναλλακτικά, γνωρίζουμε: $I(0<X_{(1)}<\theta)\cdot I(0<X_{(n)}<\theta)=1$

Οπότε: $f(\underline{x};\theta)=\theta^{-n}\cdot I(0<X_{(1)}<\theta)\cdot I(0<X_{(n)}<\theta)$

όπου: $h(\underline{x})=1$

και: $\underline{T}_1(x)=(X_{(1)},X_{(n)})'$

P4



Πχ] Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $U(\theta_1, \theta_2)$ με $\theta_1, \theta_2$ - άγνωστα. Να βρεθεί επαρκής σ.σ για το $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$.

Έχουμε: $f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot I(\theta_1 < x < \theta_2)$.

όπου: $I(\theta_1 < x < \theta_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Η από κοινού σ.π.π.

$$f(\underline{x}; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot I(\theta_1 < x_i < \theta_2) =$$

$$= (\theta_2 - \theta_1)^{-\nu} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\theta_1 < x_i < \theta_2)$$

Ζητάμε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(\theta_1 < x_i < \theta_2) = 1 \iff$

$$\iff I(\theta_1 < x_i < \theta_2) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, \nu$$

$$\iff x_i \in (\theta_1, \theta_2), \quad \forall i = 1, \dots, \nu$$

$$\iff \theta_1 < x_{(1)} \text{ κ' } x_{(\nu)} < \theta_2$$

$$\iff I(\theta_1 < x_{(1)} < \infty) \cdot I(-\infty < x_{(\nu)} < \theta_2) = 1$$

Άρα: $f(\underline{x};\underline{\theta}) = (\theta_2-\theta_1)^{-\nu} \cdot I(\theta_1 < X_{(1)} < \infty) \cdot I(-\infty < X_{(\nu)} < \theta_2)$

$= h(\underline{x}) \cdot g(T_1(\underline{x}) = X_{(1)}, T_2(\underline{x}) = X_{(\nu)}; \underline{\theta})$

όπου: $h(\underline{x}) = 1$.

Άρα: $\underset{\sim}{T}(\underline{x}) = (X_{(1)}, X_{(\nu)})'$ επαρκής σ.σ.

για το $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. $\boxtimes$