P1

Παρασκευή, 22 Οκτωβρίου 2021 1:25 μμ

Παραγοντικό Κριτήριο του Neyman

Έστω $\underline{X}=(X_1,X_2,\dots,X_\nu)'$ τ.δ. από μια διακριτή κατανομή (ή και συνεχής) με σ.π. $f(\underline{x};\underline{\theta})$, $\underline{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_s)'$. Τότε η σ.σ. $T(\underline{x})=(T_1(\underline{x}),T_2(\underline{x}),\dots,T_k(\underline{x}))'$ είναι επαρκής σ.σ. για το $\underline{\theta}$ ανν μπορούν να βρεθούν δύο μη αρνητικές συναρτήσεις $g(\cdot)$ και $h(\cdot)$ τ.ω. η από κοινού σ.π. του $\underline{X}$ να γράφεται στη μορφή

$$f(\underline{x};\underline{\theta})=g(T(\underline{x});\underline{\theta})\cdot h(\underline{x})$$

όπου η $g(\cdot)$ εξαρτάται από το $\underline{x}$ μόνο μέσω της $T(\underline{x})$, ενώ η $h(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη του $\underline{\theta}$.

($\Rightarrow$) Έστω διακριτή περίπτωση με $\nu=1$, $s=1$, $k=1$.
Έστω ότι: $f(x;\theta)=g(T(x);\theta)\cdot h(x)$. Θα δείξουμε ότι η $T(x)$ είναι επαρκής για το θ.

$$P(X=x|T=t)=\begin{cases}\dfrac{P(X=x,T=t)}{P(T=t)}, & \text{αν } T=T(x)=t\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

<u>Είναι:</u> $P(T=t)=\sum\limits_{T(x)=t}P(X=x)=\sum\limits_{T(x)=t}f(x;\theta)$

$$= \sum_{T(x)=t} g(T(x);\theta)\cdot h(x) = g(t;\theta)\sum_{T(x)=t} h(x)$$

Άρα, για $T(x)=t$: $P(X=x \mid T=t) = \dfrac{P(X=x, T=t)}{P(T=t)} =$

$$= \frac{P(X=x)}{P(T=t)} = \frac{\cancel{g(T(x);\theta)}\, h(x)}{\cancel{g(T(x);\theta)}\cdot \sum_{T(x)=t} h(x)} = \frac{h(x)}{\sum_{T(x)=t} h(x)}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του θ, σύμφωνα με τον ορισμό. Άρα $T(x)$ επαρκής σ.σ. για το θ.

$(\Leftarrow)$ Έστω τώρα ότι $T(x)$ είναι επαρκής για το θ.

Έχουμε: $f(x;\theta) = P(X=x) = P(X=x, T=t) =$

$$= P(X=x \mid T=t)\cdot P(T=t).$$

Αφού η $T(\underline{x})$ είναι επαρκής τότε

$P(X=x \mid T=t)$ ανεξ. του θ.

Άρα: $f(x;\theta) = g(T(x);\theta)\cdot h(x)$

όπου: $h(x) = P(X=x \mid T=t)$ και

$$g(T(x);\theta) = P(T=t).$$

P2

Παρασκευή, 22 Οκτωβρίου 2021 2:03 μμ

Πχ | Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από Poisson(λ)
Να βρεθεί επαρκής σ.σ. για το λ.

Η από κοινού των $X_1, \ldots, X_\nu$ είναι:

$$f(\underline{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} =$$

$$= e^{-\nu\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i!} = g(T(\underline{x});\lambda) \cdot h(\underline{x}).$$

όπου: $g(T(x);\lambda) = e^{-\nu\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$

και $h(\underline{x}) = 1 / \prod_{i=1}^{\nu} x_i!$

Συνεπώς: $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ επαρκής σ.σ. για το λ.

Πχ | Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $\theta > 0$ κ' $0 < x < 1$.
Να βρεθεί επαρκής σ.σ. για το θ.

Έπεται: $f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \theta x_i^{\theta-1} =$

$= \theta^{\nu} \cdot \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{\theta-1} = g\left(T(x)=\prod_{i=1}^{\nu} x_i;\theta\right) \cdot h(\underline{x})$

όπου: $h(\underline{x}) = 1$

Συνεπώς: $T(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{\nu} x_i$ επαρκής σ.σ. για το θ.

MINIMAL SUFFICIENT STATISTIC

Μια επαρκής σ.σ. $T = T(\underline{x})$ ονομάζεται ελάχιστη επαρκής σ.σ. αν για κάθε άλλη επαρκή $T' = T'(\underline{x})$ ισχύει ότι η T είναι συνάρτηση της T'. Συνεπώς υπάρχει $f(\cdot)$ τ.ω.: $T(\underline{x}) = f(T'(\underline{x}))$.

P3

<u>π.χ)</u> Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2=1)$. Να βρεθεί επαρκής σ.σ. για το μ.

Έχουμε: $f(\underline{x};\mu) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\mu) =$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\} = (2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$= (2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \nu\mu^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right]\right\} =$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\right\}} \cdot \underbrace{\exp\left\{-\frac{\nu}{2}\mu^2 + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i\right\}}$$

$$= \quad h(\underset{\sim}{x}) \quad \cdot \quad g\left(T(x)=\sum_{i=1}^{\nu} x_i ; \mu\right)$$

Συνεπώς $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i$ επαρκής σ.σ. για το μ.

<u>Ομοίως:</u>

$$f(\underline{x};\mu) = (2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-\nu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{\nu}(\bar{x}-\mu)^2 + \right.\right. \quad \to 0 \; (*)$$

$$\left.\left. (\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})\right]\right\}$$

$$= (2\pi)^{-\nu/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{\nu} \ldots + \sum_{i=1}^{\nu} \ldots$$

$$+ 2(\bar{x}-\mu)\cdot \cancel{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})}\Big]\Big\}$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{-\nu/2}\cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\Big\}}\cdot \underline{\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(\bar{x}-\mu)^2\Big\}}$$

$$= h(\underset{\sim}{x}) \cdot g(T(\underset{\sim}{x})=\bar{x};\mu)$$

Άρα ο $\bar{X}$ είναι επαρκής σ.σ. για το μ.

$$\boxed{(*)\ \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}x_i - \nu\bar{x} = \nu\bar{x}-\nu\bar{x} = 0}$$

ΠΧ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$
Να βρεθεί επαρκής σ.σ για το: $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1=\mu, \theta_2=\sigma^2)$

$$f(\underset{\sim}{x};\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\mu,\sigma^2) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2\right\} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2} + \frac{\mu \cdot \sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\sigma^2} - \frac{\nu\mu^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= h(\underline{x}) \cdot g\left(T_1(\underline{x}) = \sum x_i, T_2(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 ; \mu,\sigma^2\right)$$

<u>ομοίως</u>:

$$f(\underline{x};\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2\right\}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(\bar{x}-\mu)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma^2} \cdot (\bar{x}-\mu) \cdot \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})}}_{\to 0}\right\}$$

$$= h(\underset{\sim}{x}) \cdot g\left(T_1(\underset{\sim}{x}) = \bar{x}, T_2(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2, \mu, \sigma^2\right).$$