P1

Θ) Αν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξ. τ.μ. που ακολουθούν χ^2 με $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ β.ε., τότε η τ.μ.

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

ακολουθεί χ^2 με $k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$ β.ε.

Έστω $Z \sim N(0,1)$ κι' $Z^2 \sim \chi^2_1$. Τότε:

$$M_{Z^2}(t) = E\left(e^{tZ^2}\right) = \int e^{tz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(1-2t) z^2\right\} dz =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{1/(1-2t)}\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-2t}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{1/(1-2t)}\right\} dz}_{1}$$

$$= (1-2t)^{-1/2}$$

Έστω: $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, όπου $X_i \sim \chi^2_1$ <u>iid</u>

Έχουμε:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{tX_1+\dots+tX_\nu}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{\nu} (1-2t)^{-1/2} = (1-2t)^{-\nu/2}.$$

Άρα: $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \chi^2_\nu$.

(*) Αντίστοιχα, όταν οι X_i είναι ανεξάρτητες αλλά όχι ισόνομες, τότε το άθροισμα των β.ε. θα έχει κατανομή των β.ε. της μορφής χ^2.

θ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Τότε:

↳α $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/\nu)$

↳β Τα στατιστικά $\bar{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητα

↳γ η δειγματική κατανομή του

$$\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$$

$\pm\mu$

γ) Έχουμε:

$$\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \frac{\cancel{(\nu-1)}\cdot \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\cancel{\nu-1}}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu+\mu-\bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 + \nu\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$- \frac{2(\bar{x}-\mu)\cdot(\nu\bar{x}-\nu\mu)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right)^2.$$

$$\hookrightarrow \frac{2(\bar{x}-\mu)(\nu\bar{x}-\nu\mu)}{\sigma^2} = 2\nu\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2} =$$

$$= 2\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Συνεπώς: $$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2_n} - \underbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{\chi^2_1}$$

Οπότε: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \blacksquare$$

P3

Τετάρτη, 13 Οκτωβρίου 2021 2:08 μμ

Θ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό με μ και σ^2. Τότε, η συνάρτηση

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}}$$ ακολουθεί t-κατανομή με $(\nu-1)$-β.ε.

Γνωρίζουμε ότι: $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/\nu)$

και $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$$

καθώς και $$\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$$

Επιπλέον, $\overline{X}$ και S^2 ανεξ., οπότε έχουμε:

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{(\nu-1)}\cdot S^2}{\sigma^2} \Big/ \cancel{\nu-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}} \sim t_{\nu-1}.$$

θ) Έστω οι διακυμάνσεις δύο τ.δ. μεγέθους ν_1 κ' ν_2 από δύο ανεξ. κανονικούς πληθυσμούς με μέσες τιμές κ' διακυμάνσεις (μ_1, σ_1^2) κ' (μ_2, σ_2^2) αντίστοιχα. Τότε:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{\nu_1-1, \nu_2-1}$$

Γνωρίζουμε ότι: $\dfrac{(\nu_1-1) \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{\nu_1-1}$

και $\dfrac{(\nu_2-1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{\nu_2-1}$. Οπότε,

$$\frac{\dfrac{(\nu_1-1) \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ \nu_1-1}{\dfrac{(\nu_2-1) \cdot S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ \nu_2-1} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{\nu_1-1, \nu_2-1}$$

$\boxtimes$

P4

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(0, \theta)$ $\to \sigma^2$.

ΝΔΟ η $T = T(\underline{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\nu}$ είναι μια α.ε. του θ και έχει διασπορά $\dfrac{2\theta^2}{\nu}$.

Έχουμε:

$$E(T) = E\left(\frac{\sum X_i^2}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} E(X_i^2) \overset{\mu=0}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} V(X_i) = \frac{1}{\nu} \cdot \nu\theta = \theta.$$ Οπότε α.ε. του θ.

Επίσης:

$$V(T) = V\left(\frac{\sum X_i^2}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} V(X_i^2).$$

Ξέρουμε ότι: $X_i \sim N(0,\theta)$ οπότε: $Z_i = \dfrac{X_i}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1)$

Συνεπώς: $Z_i^2 = \dfrac{X_i^2}{\theta} \sim \chi_1^2$. Οπότε: $V(Z_i^2) = 2$

Ακολούθως: $\sum_{i=1}^{\nu} \left(\dfrac{X_i^2}{\theta}\right) \sim \chi_\nu^2 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow V\left(\sum \left(\frac{X_i^2}{\theta}\right)\right) = 2\nu \Rightarrow \frac{1}{\theta^2} V\left(\sum X_i^2\right) = 2\nu$$

$$\Rightarrow V\left(\sum X_i^2\right) = 2\nu\theta^2$$

Οπότε: $V(T) = \dfrac{1}{\nu^2} \cdot V\left(\sum X_i^2\right) = \dfrac{1}{\nu^2} 2\nu\theta^2 = \dfrac{2\theta^2}{\nu}$.

Επίσης: $E\left(\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{X_i^2}{\vartheta}\right)\right)=\nu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\vartheta}\cdot E\left(\sum X_i^2\right)=\nu \Rightarrow E\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\nu}\right)=\vartheta. \quad \blacksquare$$

P5

Τετάρτη, 13 Οκτωβρίου 2021 2:34 μμ

Παρ) Έστω $x_1, \dots, x_\nu$ τ.δ. από πληθυσμό με μέσο μ και διασπορά σ^2. Έστω: $T = c \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$, να βρεθεί τιμή του c ώστε η T να είναι α.ε. του σ^2.

Έχουμε: $E(T) = E\left[c \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2\right] =$

$$= c \cdot E\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \nu \bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}_{\nu\bar{x}}\right] =$$

$$= c \cdot E\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \nu \bar{x}^2 - 2\nu \bar{x}^2\right] =$$

$$= c\, E\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \bar{x}^2\right] = c\left[E\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\right) - \nu E(\bar{x}^2)\right] =$$

$$= c\left[\sum_{i=1}^{\nu} E(x_i^2) - \nu E(\bar{x}^2)\right] =$$

$$= c\left[\sum_{i=1}^{\nu}\left(E(x_i)^2 + V(x_i)\right) - \nu\left(E(\bar{x})^2 + V(\bar{x})\right)\right] =$$

$$= c\left[\sum_{i=1}^{\nu}(\mu^2 + \sigma^2) - \nu\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{\nu}\right)\right] =$$

$$= c\left[\cancel{\nu\mu^2} + \nu\sigma^2 - \cancel{\nu\mu^2} - \sigma^2\right] = c\left(\nu\sigma^2 - \sigma^2\right)$$

$= c \cdot (\nu-1)\sigma^2$.

Άρα, για να είναι $E(T)=\sigma^2$

θα πρέπει: $c = \frac{1}{\nu-1}$

Όπου: $T = \frac{1}{\nu-1} \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2$

(*) $\frac{(\nu-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

$E\left(\frac{\cancel{(\nu-1)} \cdot S^2}{\sigma^2}\right) = \cancel{\nu-1} \Rightarrow \frac{E(S^2)}{\sigma^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{E(S^2)=\sigma^2}}$

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθεί c ε.ω. $T = c \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2$ α.ε. του σ^2

1) $\overline{X}, S^2$ ανεξ.

2) $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

Άρα: $E\left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}\right) = \nu-1 \Rightarrow E\left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\nu-1}\right) = \sigma^2$

Ans : $\sigma = 1/\nu - 1$

Μεροληψία (bias) ή σφάλμα εκτιμήτριας

Αν $U=U(\underline{x})$ μια εκτιμήτρια της παραμέτρου θ, ορίζουμε ως μεροληψία τη ποσότητα

$$b(U)=E(U)-\theta$$

Ομοίως, αν $U=U(\underline{x})$ εκτιμήτρια της $g(\theta)$, τότε: $b(U)=E(U)-g(\theta)$.

- Ως σφάλμα ενός εκτιμητή U της $g(\theta)$ μπορεί να θεωρηθεί η ποσότητα $|U-g(\theta)|$
- Αντ' αυτής, το τετράγωνο $[U-g(\theta)]^2$ ονομάζεται τετραγωνικό σφάλμα.
- Το $E[(U-g(\theta))^2]$ ονομάζεται <u>μέσο τετραγωνικό σφάλμα</u> (ΜΤΣ) (mean square error - MSE).