ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Ορισμός: Στατιστική συνάρτηση ή δειγματοσυνάρτηση είναι κάθε συνάρτηση $T(\underline{x}) = T(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ του δείγματος η οποία μπορεί να βρεθεί χωρίς τη γνώση της κατανομής από την οποία προέρχεται το δείγμα.

πχ $\bar{X} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, $S^2 = \frac{1}{\nu-1} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \bar{X})^2$

Εκτιμήτριες Συναρτήσεις

Οι σημειακές εκτιμήτριες μιας παραμέτρου θ συμβολίζονται με $\hat{\theta}$, είναι συναρτήσεις του δείγματος και αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές την άγνωστης παράμετρο θ, τις εκτιμήσεις.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τδ με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$ $i = 1, \dots, \nu$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο μ, δηλ. ζητάμε εκτιμήτρια $\hat{\mu}$ της μ.

↳ Το πραγματικό μ είναι άγνωστη σταθερά

↳ Το $\hat{\mu}$ είναι τυχαία μεταβλητή ως συνάρτηση του δείγματος

Για να είναι το $\hat{\mu}$ "αποδεκτή", "λογική", "καλή" εκτιμήτρια του μ θα πρέπει η τιμή $\hat{\mu}$ να είναι πολύ κοντά στην πραγματική μ. Δηλ.

$$|\hat{\mu} - \mu| < \delta \quad , \text{ για } \delta > 0$$

ή

$$\lim_{\nu \to \infty} Pr\left(|\hat{\mu}_\nu - \mu| < \delta \right) = 1$$

Επειδή ζητάμε εκτιμήτρια του μέσου του πληθυσμού, διαισθητικά μια καλή εκτιμήτρια πρέπει να είναι ο μέσος του δείγματος $\overline{X}$.

(*) Έχουμε $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, άρα $\overline{X} \sim N(E(\overline{X}), V(\overline{X}))$ ως γραμμ. συνδυασμός κανονικών τ.μ.

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i)}{\nu} = \frac{\nu\mu}{\nu} = \mu.$$

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} V(X_i) =$$

$$= \frac{\nu\sigma^2}{\nu^2} = \frac{\sigma^2}{\nu}$$

Άρα: $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

P2

Παρασκευή, 8 Οκτωβρίου 2021 2:30 μμ

Έχουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}$

Έχουμε $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, \nu$

$$M_{\bar{X}}(t) = E\left[e^{t\bar{X}}\right] = E\left[e^{t\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i}\right] = E\left[e^{\frac{t}{\nu}X_1} \cdot e^{\frac{t}{\nu}X_2} \cdots e^{\frac{t}{\nu}X_\nu}\right]$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} E\left[e^{\frac{t}{\nu}X_1}\right] \cdots E\left[e^{\frac{t}{\nu}X_\nu}\right] =$$

$$= M_{X_1}\left(\frac{t}{\nu}\right) \cdots M_{X_\nu}\left(\frac{t}{\nu}\right) = \prod_{i=1}^{\nu} M_{X_i}\left(\frac{t}{\nu}\right)$$

$$= \left[M_X\left(\frac{t}{\nu}\right)\right]^{\nu} = \exp\left\{\mu \frac{t}{\nu} + \sigma^2 \frac{t^2}{2\nu^2}\right\}^{\nu} =$$

$$= \exp\left\{\cancel{\nu}\mu \frac{t}{\cancel{\nu}} + \cancel{\nu}\sigma^2 \frac{t^2}{2\nu^{\cancel{2}}}\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{\nu}\frac{t^2}{2}\right\}$$

είναι η ροπογεννήτρια της $N\left(\mu, \sigma^2/\nu\right)$ ■

Στο πχ $\bar{X} \sim N\left(\mu, 1/\nu\right) \Rightarrow \dfrac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$

Θέλουμε: $\lim_{\nu \to \infty} P_r\left(|\hat{\mu}_\nu - \mu| < \delta\right) = 1$

Για $\hat{\mu}_\nu = \bar{X}_\nu$: $P(-\delta < \bar{X}_\nu - \mu < \delta) =$

$$= P\left(-\frac{\delta}{1/\sqrt{\nu}} < \frac{\bar{X}_\nu - \mu}{1/\sqrt{\nu}} < \frac{\delta}{1/\sqrt{\nu}}\right) =$$

$$= P_r\left(-\delta\sqrt{\nu} < Z < \delta\sqrt{\nu}\right) =$$

...

$$= Pr\left(-\delta\sqrt{\nu} < Z < \delta\sqrt{\nu}\right) =$$

$$= \Phi(\delta\sqrt{\nu}) - \Phi(-\delta\sqrt{\nu}) = 2\Phi(\delta\sqrt{\nu}) - 1$$

και για $\nu \to \infty$ τότε: $\Phi(\delta\sqrt{\nu}) \to 1$

Συνεπώς: $\lim_{\nu\to\infty} Pr\left(|\bar{X}_\nu - \mu| < \delta\right) = 2 - 1 = 1$.

Άρα το $\bar{X}_\nu$ είναι "καλή" εκτιμήτρια του μ.

Για συγκεκριμένο δείγμα $x_1, \dots, x_\nu$ η τιμή της εκτιμήτριας $\bar{X}_\nu$ είναι η εκτίμηση.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Το σύνολο $\Theta \in \mathbb{R}^s$ το οποίο αποτελείται από <u>όλες</u> τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ λέγεται παραμετρικός χώρος.

<u>πχ</u>) αν $\underline{\theta} = (\mu, \sigma^2)$, όπου μ, σ^2 παράμετροι της κανονικής, τότε:

$$\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, +\infty) \in \mathbb{R}^2$$

(*) Γενικότερα, θα μπορούσε να μας ενδιαφέρει η επίλυση του συστήματος του $\underline{\theta}$, έστω $g(\underline{y})$.