Άσκηση

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από ομοιόμορφη U(-θ, θ)

α) Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση (σ.σ) $T = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|\}$ είναι επαρκής και πλήρης για το θ.

β) Βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς (α.ε.ε.δ) του πλάτους 2θ του διαστήματος καθώς και της διασποράς $\theta^2/3$ των παρατηρήσεων.

Λύση

α) Επειδή το στήριγμα εξαρτάται από την παράμετρο θ και η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής θα ελέγξουμε την επάρκεια με παραγοντικό κριτήριο. Πράγματι έχουμε:

$f(\underline{x}/\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2\theta} \mathrm{I}(-\theta \le x_i \le \theta) = (2\theta)^{-\nu} \prod_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}(-\theta \le x_i \le \theta)$ αυτό σημαίνει ότι

$\prod_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}(-\theta \le x_i \le \theta) = 1$ δηλαδή κάθε x_i ανήκει στο διάστημα αυτό άρα αρκεί η μέγιστη παρατήρηση να ανήκει στο διάστημα αυτό και η ελάχιστη επίσης ή αλλιώς

$0 \le T = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|\} \le \theta$.

Άρα η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του δείγματος γράφεται

$$f(\underline{x}/\theta) = (2\theta)^{-\nu} \prod_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}(-\theta \le x_i \le \theta) = (2\theta)^{-\nu} \mathrm{I}(0 \le \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|\} \le \theta) = (2\theta)^{-\nu} \mathrm{I}(0 \le \mathrm{T} \le \theta)$$

Έτσι η σ.σ T είναι επαρκής για το θ. Για την πληρότητα της T πρέπει να δειχθεί ότι η συνθήκη $E[g(T)] = 0 \,\forall\, \theta \ge 0 \Rightarrow g(t) = 0 \,\forall t$. Πρέπει να βρούμε την κατανομή της T.

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(\max|x_i| \le t) = P(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu| \le t) = \prod_{i=1}^{\nu} P(|x_i| \le t) = \prod_{i=1}^{\nu} P(-t \le x_i \le t) =$$

$= \prod_{i=1}^{\nu} [F_x(t) - F_x(-t)] = [F_x(t) - F_x(-t)]^{\nu}$ (1). Έχουμε ότι:

$F_x(t) = \int_{-\theta}^{t} f(x;\theta)dx = \int_{-\theta}^{t} \frac{1}{2\theta} dx = \frac{t+\theta}{2\theta}$ και ομοίως $F_x(-t) = \frac{-t+\theta}{2\theta}$ οπότε η (1) γίνεται

$F_T(t) = (\frac{2t}{2\theta})^{\nu} = (\frac{t}{\theta})^{\nu}$. Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε την σ.π.π της T

$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^{\nu}}, 0 < t < \theta$. Έτσι

$$E[g(T)] = 0 \,\forall\, \theta \ge 0 \Rightarrow \int_0^{\theta} g(t) f_{\mathrm{T}}(t)dt = \int_0^{\theta} g(t) \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^{\nu}} dt = 0 \,\forall\, \theta \ge 0 \Rightarrow$$

$\int_0^{\theta} g(t) t^{\nu-1} dt = 0 \,\forall\, \theta \ge 0$ οπότε παραγωγίζοντας ως προς θ έχουμε

$g(\theta) = 0 \,\forall\, \theta \ge 0 \Rightarrow g(t) = 0 \,\forall\, 0 \le t \le \theta$ άρα η T είναι πλήρης.

β) Για να βρούμε α.ε.ε.δ του 2θ αρκεί να βρούμε σ.σ Ψ(Τ) τέτοια ώστε Ε[Ψ(Τ)]=2θ.

$E[\Psi(\mathrm{T})] = 2\theta \Rightarrow \int_0^\theta \psi(t)\frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}dt = 2\theta \Rightarrow \int_0^\theta \psi(t)t^{\nu-1}dt = \frac{2\theta^{\nu+1}}{\nu} \Rightarrow$ οπότε παραγωγίζοντας ως προς θ έχουμε : $\psi(\theta)\theta^{\nu-1} = \frac{2(\nu+1)\theta^\nu}{\nu} \Rightarrow \psi(\theta) = \frac{2(\nu+1)\theta}{\nu} \Rightarrow \psi(\mathrm{T}) = \frac{2(\nu+1)\mathrm{T}}{\nu}$ και η τελευταία είναι η α.ε.ε.δ του 2θ. Ομοίως βρίσκουμε α.ε.ε.δ του $\theta^2/3$ την $\psi_1(\mathrm{T})=(2+\nu)\mathrm{T}^2/3\nu$ (2). Πράγματι:

$E[\Psi_1(\mathrm{T})] = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \int_0^\theta \psi_1(t)\frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}dt = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \int_0^\theta \psi_1(t)t^{\nu-1}dt = \frac{\theta^{\nu+2}}{3\nu}$ και παραγωγίζοντας ως προς θ πάλι, έχουμε: $\psi_1(\theta)\theta^{\nu-1} = \frac{2+\nu}{3\nu}\theta^{\nu+1} \Rightarrow \psi_1(\theta) = \frac{2+\nu}{3\nu}\theta^2 \Rightarrow \psi_1(\mathrm{T}) = \frac{2+\nu}{3\nu}\mathrm{T}^2$.