Άσκηση. (α) Αν X τυχαία μεταβλητή με κατανομή που ανήκει στην μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x \mid \theta) = \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x),$$

να δείξετε ότι $E[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}$ και $V[T(X)] = \frac{1}{n'(\theta)}\left[\frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}\right]'$.

(β) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x \mid \theta) = \kappa x^{\kappa-1}\theta \exp\{-\theta x^\kappa\},\ x > 0,\ \theta > 0, \kappa > 0,$$

όπου κ γνωστό. Ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών; Να βρεθούν τα $E(X^\kappa)$ και $V(X^\kappa)$.

Λύση. (α) Η $f(x \mid \theta)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, οπότε

$$\int \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x)dx = 1 \Rightarrow \int \exp\{n(\theta)T(x)\}h(x)dx = \exp\{B(\theta)\}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ και αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και παραγώγισης:

$$\int \exp\{n(\theta)T(x)\}T(x)n'(\theta)h(x)dx = \exp\{B(\theta)\}B'(\theta). \tag{1}$$

Φέρνουμε στο αριστερό μέλος τον σταθερό (ως προς x) όρο, $\exp\{B(\theta)\}$:

$$n'(\theta)\int \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x)T(x)dx = B'(\theta) \Rightarrow E[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}.$$

Τώρα, στη σχέση (1), παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς θ:

$$\int \exp\{n(\theta)T(x)\}T(x)^2 n'(\theta)^2 h(x)dx + \int \exp\{n(\theta)T(x)\}T(x)n''(\theta)h(x)dx = \exp\{B(\theta)\}B'(\theta)^2 + \exp\{B(\theta)\}B''(\theta).$$

Φέρνουμε στο αριστερό μέλος τον σταθερό όρο, $\exp\{B(\theta)\}$:

$$n'(\theta)^2\int \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x)T(x)^2dx + n''(\theta)\int \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x)T(x)dx = B'(\theta)^2 + B''(\theta)$$

$$\Rightarrow n'(\theta)^2E[T(X)^2] + n''(\theta)E[T(X)] = B'(\theta)^2 + B''(\theta) \Rightarrow n'(\theta)^2E[T(X)^2] = B'(\theta)^2 + B''(\theta) - n''(\theta)\frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}$$

Από τη γνωστή σχέση, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, έχουμε

$$V[T(X)] = E[T(X)^2] - [E[T(X)]]^2 = \frac{B'(\theta)^2n'(\theta) + B''(\theta)n'(\theta) - n''(\theta)B'(\theta) - B'(\theta)^2n'(\theta)}{n'(\theta)^3}$$

$$\Rightarrow V[T(X)] = \frac{1}{n'(\theta)}\left[\frac{B''(\theta)n'(\theta) - n''(\theta)B'(\theta)}{n'(\theta)^2}\right] = \left[\frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}\right]'\frac{1}{n'(\theta)}$$

(β) Θα δείξουμε πρώτα ότι η $f(x \mid \theta)$ ανήκει στην μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών.

$$\begin{aligned} f(x \mid \theta) &= \kappa x^{\kappa-1}\theta \exp\{-\theta x^\kappa\} \\ &= \kappa x^{\kappa-1}\exp\{\ln(\theta) - \theta x^\kappa\} \\ &= \exp\{n(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x), \end{aligned}$$

όπου $h(x)=\kappa x^{\kappa-1}$, $n(\theta)=-\theta$, $T(x)=x^\kappa$, $B(\theta)=-\ln(\theta)$.
Σαν εφαρμογή του ερωτήματος (α) παίρνουμε λοιπόν

$$E[T(X)]=E(X^\kappa)=\frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}=\frac{1}{\theta}$$

$$V[T(X)]=V(X^\kappa)=\left[\frac{B'(\theta)}{n'(\theta)}\right]'\frac{1}{n'(\theta)}=\frac{1}{\theta^2}.$$