ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ | 24/10/07 | Μάθημα 1 (1)

$$1+z+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$(1-z)(1+\dots+z^n) = 1+z+z^2+\dots+z^n-z-z^2\dots-z^n-z^{n+1} = 1-z^{n+1}$, το ζητούμενο.

$$\to 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$$

Για $z=\cos\theta+i\sin\theta$ όπου $\theta\in\mathbb{R}$

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{1-(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)}{1-\cos\theta-i\sin\theta} =$$

$$= \frac{(1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{\underbrace{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}_{=2(1-\cos\theta)}} =$$

$$= \frac{(1-\cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta)+\sin\theta\sin(n+1)\theta+iA}{2(1-\cos\theta)} =$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)-(1-\cos\theta)\cos(n+1)\theta+\sin\theta\sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} + \frac{iA}{2(1-\cos\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin\theta\sin(n+1)\theta-(1-\cos\theta)\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} =$$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

Για $\alpha=\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta=\cos\frac{2\theta}{2}$ $\quad 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin(n+1)\theta - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\theta}{\cancel{2}\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{iA}{2(1-\cos\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin(n+1)\theta-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos(n+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{iA}{2(1-\cos\theta)}$$

(Basic Complex Analysis
Jerrold E. Marsden
Michael J. Hoffman / second edition
Προβλήματα)

$$\left(\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\ ,\ \beta=\theta/2 \Rightarrow \sin(\alpha-\beta)=\sin\left((n+1)\theta-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta\right)$$

Οπότε έχουμε:

$$\underbrace{=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\theta/2}}+i\frac{A}{2(1-\cos\theta)}=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \text{για } z=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$1+z+\dots+z^n=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\dots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$

$$=1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos2\theta+i\sin2\theta+\dots+\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=$$

$$\underline{=1+\cos\theta+\cos2\theta+\dots+\cos n\theta+iB}$$

Άσκηση

Αν ρ ρίζα του πολυωνύμου $z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\dots+c_1z+c_0$ τότε $|\rho|<1+|c_{n-1}|+\dots+|c_1|+|c_0|$.

Λύση Θα ισχύει $|\rho|<1$ ή $|\rho|\geq 1$

- Αν $|\rho|<1$ τότε ισχύει προφανώς
- Αν $|\rho|\geq 1$. Αφού ρ ρίζα του πολυωνύμου έχουμε ότι

$$\rho^n+c_{n-1}\rho^{n-1}+\dots+c_1\rho+c_0=0 \Rightarrow -\rho^n=c_{n-1}\rho^{n-1}-\dots-c_1\rho-c_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-\rho^n|=|c_{n-1}\rho^{n-1}-\dots-c_1\rho-c_0|\leq |c_{n-1}\rho^{n-1}|+|c_{n-2}\rho^{n-2}|+\dots+|c_1\rho|+|c_0|$$

$$\left(\text{Όμως } |\rho|\geq 1 \Rightarrow |c_j||\rho|^{n-1}\geq |c_j||\rho|^j \ \forall\, j=0,1,\dots,n-1\right)$$

$$\Rightarrow |\rho|^n\leq |c_{n-1}||\rho|^{n-1}+|c_{n-2}||\rho|^{n-1}+\dots+|c_1||\rho|^{n-1}+|c_0||\rho|^{n-1}$$

$$=\left(|c_{n-1}|+|c_{n-2}|+\dots+|c_1|+|c_0|\right)|\rho|^{n-1}$$

$$\Rightarrow |\rho|\leq |c_{n-1}|+|c_{n-2}|+\dots+|c_1|+|c_0|$$

Άσκηση

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Τότε το αλγεβρικό σύστημα $\{x^3 - 3xy^2 = \alpha,\ 3x^2y - y^3 = \beta\}$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Λύση

Έστω $z = x + yi$, $z^3 = (x+yi)^3 = x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (yi)^3 =$

$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(x^2y - y^3)$.

Έστω $W_0 = (\alpha, \beta)$, $z^3 = W_0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες

$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = \alpha + \beta i$

(x,y) $\quad z^3 + 2z = W_0$

Άσκηση

Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$\varphi_\alpha : \overline{\Delta(0,1)} \to \mathbb{C}$ με $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ παίρνει τιμές στο $\overline{\Delta(0,1)}$
δίσκος

Είναι 1-1, επί με αντίστροφο την $\varphi_{-\alpha}$. Επίσης δείξτε ότι $\varphi_\alpha(C(0,1)) = C(0,1)$

Λύση

($1 - \bar{\alpha}z \neq 0$ γιατί αν $1 - \bar{\alpha}z = 0 \Rightarrow z = 1/\bar{\alpha} \Rightarrow |z| = \dfrac{1}{|\alpha|} > 1$
άτοπο στην άσκηση $|z| \leq 1$
οπότε είπαμε ότι)

Υπολογίζουμε πόσο κάνει το $1 - |\varphi_\alpha(z)|^2 =$

$= 1 - \left|\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|^2 = 1 - \dfrac{|z-\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \dfrac{|1-\bar{\alpha}z|^2 - |z-\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} =$

$= \dfrac{(1-\bar{\alpha}z)(1-\alpha\bar{z}) - (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \dfrac{1 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2|z|^2 - |z|^2 + z\bar{\alpha} + \alpha\bar{z} - |\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} =$

$= \dfrac{1 + |\alpha|^2|z|^2 - |z|^2 - |\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \dfrac{1 - |\alpha|^2 - |z|^2(1-|\alpha|^2)}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \dfrac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\alpha}z|^2}$

Αν $z \in \overline{\Delta(0,1)}$ δηλ. $|z| \leq 1 \Rightarrow 1 - |z|^2 \geq 0$.

Άρα $1 - |\varphi_\alpha(z)|^2 \geq 0$

$\varphi_\alpha(z) \in \overline{\Delta(0,1)} \Rightarrow |\varphi_\alpha(z)| \leq 1$

$|-\alpha| < 1$

$\varphi_{-\alpha}(z) = \dfrac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$ $\quad (\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha})(z) = \varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = \dfrac{\varphi_{-\alpha}(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\varphi_{-\alpha}(z)} =$

$$=\frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar\alpha z}}{1-\bar\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar\alpha z}\right)} = \frac{\frac{z+\alpha-\alpha(1+\bar\alpha z)}{1+\bar\alpha z}}{\frac{1+\bar\alpha z-\bar\alpha(z+\alpha)}{1+\bar\alpha z}} = \frac{z-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = \frac{z(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2} = z$$

$\forall z \in \overline{\Delta(0,1)}$ ισχύει $\left.\begin{array}{l}(\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha})(z) = z = id(z)\\ (\varphi_{-\alpha}\circ\varphi_\alpha)(z) = z = id(z)\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_{-\alpha} = (\varphi_\alpha)^{-1}$

φ_α ένα 1-1, επί.

Για το ότι $\varphi_\alpha(C(0,1)) = C(0,1)$

Από τη σχέση $1-|\varphi_\alpha(z)|^2 = \dfrac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar\alpha z|^2}$ (*)

Άρα $z \in C(0,1) \Leftrightarrow |z|=1$

Άσκηση

Αν $|z|<1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+z_0^{2^k}\right) = \dfrac{1}{1-z}$

Λύση

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+z_0^{2^k}\right) = (1+z_0)(1+z_0^2)(1+z_0^4)(1+z_0^8)\cdots(1+z_0^{2^n})$$

$$(1+z_0)(1+z_0^2) = 1+z_0^2+z_0+z_0^3 = \frac{1-z_0^4}{1-z_0}$$

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+z_0^{2^k}\right) = \frac{1-z_0^4}{1-z_0}(1+z_0^4)(1+z_0^8)\cdots(1+z_0^{2^n}) =$$

$$= \frac{1-z_0^8}{1-z_0}(1+z_0^{16})\cdots(1+z_0^{2^n}) = \frac{(1-z_0^{2^n})}{1-z_0}(1-z_0^{2^{n-1}})(1+z_0^{2^n}) =$$

$$= \frac{(1-z_0^{2^n})(1+z_0^{2^n})}{1-z_0} = \frac{1-z_0^{2^{n+1}}}{1-z_0}$$

Όμως $|z_0|<1 \Rightarrow z_0^n \to 0 \Rightarrow z_0^{2^n}\to 0$

Άσκηση Υποθέστε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν την εξίσωση $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. Δείξτε ότι $|z_1-z_2| = |z_3-z_1| = |z_2-z_3|$

Άρα $z_1 \neq z_3$ και $z_2 \neq z_3$

$\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{(z_2-z_1)+(z_1-z_3)}{(z_3-z_1)+(z_2-z_3)} = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\underset{\alpha}{\frac{z_1-z_2}{z_3-z_1}}\right| = \left|\underset{\beta}{\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}}\right| = \left|\underset{\gamma}{\frac{z_2-z_3}{z_1-z_2}}\right| = \lambda \text{ τότε } \lambda^3 = \alpha\beta\gamma = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ | 31/10/07 | Μάθημα 7

Κυρτά και μη κυρτά σύνολα.

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$ ορίζεται ως:
$[z_1, z_2] \stackrel{\text{ορ}}{=} \{ w \in \mathbb{C} \,/\, \exists \lambda \in [0,1] : w = (1-\lambda) z_1 + \lambda z_2 \}$

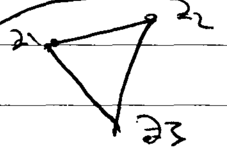
→ Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \neq \emptyset$. Το K λέγεται κυρτό αν για κάθε $z_1, z_2 \in K$ το $[z_1, z_2] \subseteq K$

→ Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Ονομάζουμε κυρτή θήκη του A το σύνολο
$C_o(A) := \bigcap \{ B \subseteq \mathbb{C} \mid A \subseteq B$ και B είναι κυρτό$\}$.
Η τομή κυρτών είναι κυρτό.
$C_o(A) = \{ w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}$ και $z_1, z_2, \dots, z_n \in A$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ώστε $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \}$

Άσκηση

Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ να είναι ένα πολυώνυμο στο $\mathbb{C}[z]$, $n \geq 2$, $a_n \neq 0$. Τότε κάθε ρίζα της $p'(z)$ βρίσκεται στην κυρτή θήκη των ριζών της $p(z)$

Λύση



$C_o(\{z_1, z_2, z_3\})$ = όλο το τρίγωνο

$P(z) = a_n (z-\rho_1)(z-\rho_2) \cdots (z-\rho_n)$, $\rho_1, \dots, \rho_n$ ρίζες του $P(z)$

$P'(z) = a_n (z-\rho_2)(z-\rho_3) \cdots (z-\rho_n) + a_n (z-\rho_1)(z-\rho_3) \cdots (z-\rho_n) + \dots + a_n (z-\rho_1)(z-\rho_2) \cdots (z-\rho_{n-1})$

$C_o(\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\})$
↳ $z = \lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_n \rho_n$, $\lambda_i \in [0,1]$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-\rho_1} + \frac{1}{z-\rho_2} + \dots + \frac{1}{z-\rho_n}$$

↳ για z όχι ρίζα του $P(z)$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

Έστω α ρίζα του $p'(z)$ δηλαδή $p'(\alpha)=0$

1) Αν α είναι και ρίζα του $p(z)$, τότε $\alpha \in Co(\{p_1, \dots p_n\})$.

2) Αν α δεν είναι ρίζα του $p(z)$.

Από την (1) για $z=\alpha$ έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha-p_1}+\frac{1}{\alpha-p_2}+\dots+\frac{1}{\alpha-p_n}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{\alpha-p_1}}+\frac{1}{\overline{\alpha-p_2}}+\dots+\frac{1}{\overline{\alpha-p_n}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha-p_1}{|\alpha-p_1|^2}+\frac{\alpha-p_2}{|\alpha-p_2|^2}+\dots+\frac{\alpha-p_n}{|\alpha-p_n|^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{|\alpha-p_1|^2}+\dots+\frac{\alpha}{|\alpha-p_n|^2}=\frac{p_1}{|\alpha-p_1|^2}+\dots+\frac{p_n}{|\alpha-p_n|^2}$$

Θέτουμε $M=\frac{1}{|\alpha-p_1|^2}+\frac{1}{|\alpha-p_2|^2}+\dots+\frac{1}{|\alpha-p_n|^2}$

Άρα $\alpha = \frac{p_1}{\underbrace{M|\alpha-p_1|^2}_{\lambda_1}}+\frac{p_2}{\underbrace{M|\alpha-p_2|^2}_{\lambda_2}}+\dots+\frac{p_n}{\underbrace{M|\alpha-p_n|^2}_{\lambda_n}}$

και $\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{|\alpha-p_1|^2}+\frac{1}{M|\alpha-p_2|^2}+\dots+\frac{1}{M|\alpha-p_n|^2}=\frac{1}{M}\cdot M=1$.

Επομένως $\alpha \in$ κυρτή θήκη των $p_1, \dots p_n$.

Έστω $f(z) = u(z) + iv(z)$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$

→ $f: A \to \mathbb{C}$ A ανοιχτό, f ολόμορφη

Τα u, v ικανοποιούν την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Άσκηση: Έστω $u: A \to \mathbb{R}$ να είναι μια αρμονική συνάρτηση. Ορίζουμε την $f: A \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. Τότε η f είναι ολόμορφη στο A.

Λύση

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z)\, i$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

Έχουμε $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ γιατί η u είναι αρμονική.

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Άρα $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x}$

$\mathcal{Q}\ell$

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$. A τόπος και ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$. Τότε η f είναι σταθερή.

Άσκηση:

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$, A τόπος $f: A \to \mathbb{R}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι σταθερή.

ΛΥΣΗ

$$f(z) = u(v) + i\,\overset{v(z)}{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}$$ $v =$ σταθερή

$u =$ σταθερή

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ Άρα $f =$ σταθερή

Άσκηση: Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$, τόπος $f: A \to i\mathbb{R} \to \{i\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, ολόμορφη. Τότε η f σταθερή.

Άσκηση Ι.Α.Ε.Ι. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, τόπος $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

i) Η f είναι σταθερή

ii) Η $|f|$ είναι σταθερή

iii) Η $\bar{f}$ είναι ολόμορφη

iv) $\mathrm{Re} f$ είναι ολόμορφη

$i \Rightarrow ii)$ Προφανές

$ii) \Rightarrow iii)$ Η $|f(z)| = c \ \forall z \in A$

$|f(z)|^2 = c^2$. Αν $c = 0$ Προφανές

Αν $c \neq 0$: $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = c^2 \Rightarrow \overline{f(z)} = \dfrac{c^2}{f(z)}$ ($f(z) \neq 0$ αφού $c \neq 0$)

$\Rightarrow \overline{f(z)}$ ολόμορφη αφού $f(z)$ ολόμορφη ως πηλίκο ολόμορφων.

$(iii) \Rightarrow iv)$

$$\mathrm{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}$$ επομένως $\mathrm{Re} f(z)$ ολόμορφη αφού $\bar{f}$, f ολόμορφες.

$iv) \Rightarrow i)$ $\mathrm{Re} f$ ολόμορφη, $\mathrm{Re} f: A \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re} f$ σταθερή.

$$f(z) = \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\mathrm{Re} f(z)} + i\,\mathrm{Im} f(z)$$

$$f'(z)=\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}+i\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}=0=\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}=0=\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}$$

Επομένως, $\operatorname{Im} f =$ σταθερή

Άσκηση: Έστω $A:=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z>1\}$ και f αναλυτική στο A, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (1), $f(z)=u(z)+iv(z)$.
Δείξτε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ και $d\in\mathbb{C}$ ώστε $f(z)=-icz+d$ στο A.

ΛΥΣΗ: • $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{\partial u}{\partial x}=0=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y)=g(y)$ και $v(x,y)=F(x)$.

• $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow g'(y)=-F'(x)=c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g'(y)=c \ \forall y\in\mathbb{R}$

$F'(x)=-c \ \forall x>1$

$F(x)=-cx+d_2$
$g(y)=cy+d_1$

$u(x,y)=cy+d_1$
$v(x,y)=-cx+d_2$

$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=cy+d_1+i(-cx+d_2)=$$
$$=cy-icx+d_1+id_2=-ci(x+iy)+\underset{d_1+id_2}{d}=-\underset{\in\mathbb{R}}{c}z+\underset{\in\mathbb{C}}{d}$$

Άσκηση. Έστω $f(z) = u(z) + i v(z)$ ολόμορφη ορισμένη στον τόπο A, $f: A \to \mathbb{C}$. Αν $\alpha \cdot u(x,y) + \beta \cdot v(x,y) = \gamma$ (1) στο A όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, τότε η f είναι σταθερή.

Λύση

Από (1) $\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ (2).

Από (1) $\alpha \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ (3)

Από Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ (4), $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (5)

$$\left(\begin{aligned}
&\alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)\\
&0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)\\
&1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \frac{\partial u}{\partial y} + (-1) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)\\
&0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (1) \frac{\partial v}{\partial x} + 1 \frac{\partial u}{\partial y} + 0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)
\end{aligned}\right)$$

Έχω ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$

Άρα η μοναδική λύση είναι η μηδενική.
Όλες οι μερικές παράγωγοι είναι ίσες με μηδέν και επομένως η f είναι σταθερή στο A.