Μάθημα 27 (167)

Μιγαδική Ανάλυση 17/11/2008.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z-1}{(z-1)^2}, 1\right).$$

$$e^z = e^{z-1+1} = e\cdot e^{z-1} = e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = e + e\cdot(z-1) + e\cdot\frac{(z-1)^2}{2} + \dots$$

$$e^z - 1 = (e-1) + e(z-1) + \frac{e(z-1)^2}{2} + \dots$$

$$\frac{e^z-1}{(z-1)^2} = \frac{e-1}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2} + \dots$$

Άρα, $\mathrm{Res}(\ ,1) = e$.

Αλλιώς: $\mathrm{Res} = \frac{1}{1}\cdot\left[(z-1)^2\cdot\frac{e^z-1}{(z-1)^2}\right]'$

Άρα $(e^z-1)'\Big|_{z=1} = e^z\Big|_{z=1} = e$.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z-1}{\sin^3 z}, 0\right)$$

↓

πόλος στο 0 πολ/τας 2

(ρίζα στο e^z-1 με πολ/τα 1

και στο $\sin^3 z$ " " 3).

Άρα: $\frac{e^z-1}{\sin^3 z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots$

168

Άρα: $z^2 \cdot \dfrac{e^z-1}{\sin^3 z} = a_{-2} + a_{-1} z + a_0 z^2 + \ldots$

Άρα, $a_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2 \dfrac{e^z-1}{\sin^3 z} =$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\left(\frac{z}{\sin z}\right)^3 \cdot \frac{e^z-1}{z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = e^z\Big|_{z=0} = 1.$$

Για τον a_{-1}:

$$\lim_{z\to 0} z\left(\frac{e^z-1}{\sin^3 z} - \frac{1}{z^2}\right) = a_{-1}.$$ Θα βγεί $\frac{1}{2}$.

αλλά θα κάνουμε πολλές φορές De L'Hospital.

Αλλιώς:

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}$$

169

Άρα, $\dfrac{e^z-1}{(\sin z)^3} = \dfrac{z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}{z^3 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}\right)^3}$

$$= z^{-2} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}\right)^3}$$

στο $z=0$ είναι $=1, \neq 0$.

Θέτω: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$, $f(0)=1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$,

και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}$, $g(0)=1$, $g'(0)=0$.

Είναι: $\dfrac{e^z-1}{(\sin z)^3} = z^{-2} \cdot \dfrac{f(z)}{(g(z))^3}$. Άρα:

$$\mathrm{Res} = \left[\frac{f(z)}{g(z)^3}\right]'\Bigg|_{z=0} = \left(\frac{f'(z)\cdot g^3(z) - f(z)\cdot 3g^2(z)\cdot g'(z)}{g^6(z)}\right)$$

$$= \frac{f'(0)\cdot g^3(0) - \cancel{f(0)\cdot 3\cdot g^2(0)\cdot g'(0)}^{\,0}}{g^6(0)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{1} = \frac{1}{2}.$$

(170)

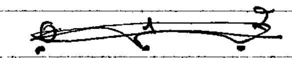
$\rightsquigarrow$ $I_r = \int_{|z|=r} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz$, $0<r$, $r\neq 1, 2$.

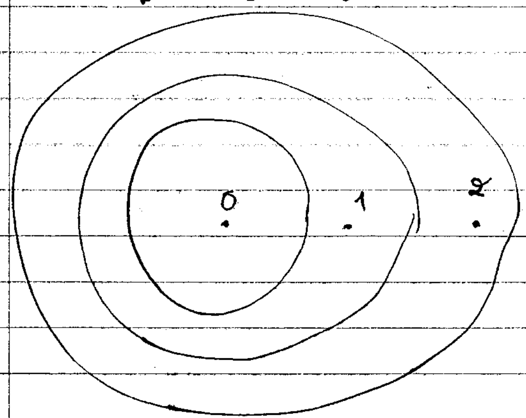
$Res\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}, 1\right)$ πόλος τάξης 1

$= \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(z-1)}(z-2)} = -1.$

Και: $Res\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}, 2\right)$ πόλος τάξης 1

$= \lim_{z\to 2} \left[\cancel{(z-2)} \cdot \frac{1}{(z-1)\cancel{(z-2)}}\right] = 1.$





1η περ.: $0<r<1$. $I_r = 0$, διότι Ind $=0$.

2η περ.: $1<r<2$: $I_r =$

(171)

$2\pi i \cdot \left[Res(f,1)\, \underbrace{Ind(\gamma_r,1)}_{=1} + Res(f,2) \cdot \underbrace{Ind(\gamma_r,2)}_{=0}\right] =$

$= 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i.$

Άλλως:

$I_r = \int_{|z|=r} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}\,dz \overset{\text{Τύπος του}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z-2}\Big|_{z=1}\right) =$

$= 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i.$

3η περ.: $2<r$.

$I_r = 2\pi i(-1\cdot 1 + (1\cdot 1)) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$

Άλλως: Θα έκανα $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$.

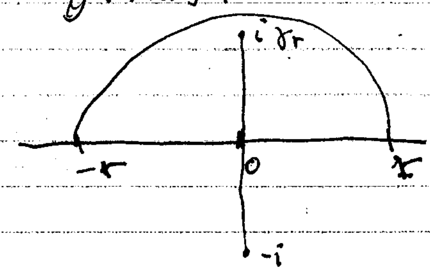
$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξ εφ}\, x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$\|$

$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^2}$

Παίρνω καμπύλη που να περιέχει τα ανώμαλα σημεία ώστε στις άλλες Ind $=0$

Παίρνω $r>1$ και $\gamma_r(t) = r\cdot e^{it}$, $0\le t\le \pi$.



(172)

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z \to i} \frac{1}{2z} = \frac{1}{2i}.$$

$$\underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^2}}_{\text{άθροισμα ολοκλ.}} = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \overset{\frac{1}{2i}}{\mathrm{Res}} \cdot \overset{1}{\mathrm{Ind}} = \pi$$

$r \to +\infty$: $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^2} \to 0$?

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{r^2-1}$$

$$0 \leq \left|\int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \underbrace{\pi r}_{\text{μήκος}} \cdot \frac{1}{r^2-1} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

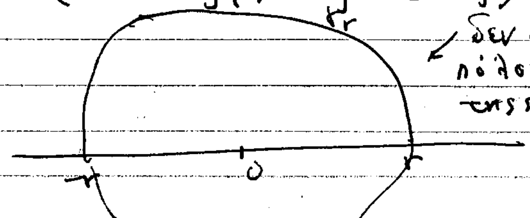
→ P, Q πολυώνυμα, $\deg Q \geq 2 + \deg P$.
$Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: ~~[illegible]~~ αν $\frac{P(z)}{Q(z)}$ δεν έχει πόλους στο $\mathbb{R}$.

Τότε, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx =$

$$= \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \mathrm{Im}\, z_j > 0}} \mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz.$$

Θεωρώ
r μεγάλο ($r > |z_j|, \forall z_j : Q(z_j) = 0$)



δεν υπάρχει πόλος εκτός της περιφέρειας.

(173)

$$\int_{-r}^{r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \mathrm{Im}(z_j)>0}} \mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

Αρκεί ν.δ.ο. $\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

Αλλά: $\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \leq \pi r \cdot \frac{1}{r^2} \cdot c \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

$\deg Q \geq \deg P + 2$, άρα όταν φράζουμε στο άπειρο θα βγει το $\frac{1}{r^2} \cdot c$.

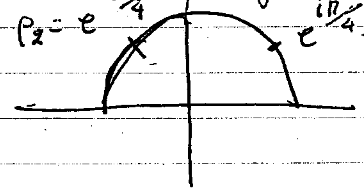
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Θεωρώ την $\frac{z^2}{1+z^4}$.

(174)

Ρίζες του $1+z^4$ για $\operatorname{Im} z \geq 0$:

$\rho_2 = e^{i3\pi/4}$, $e^{i\pi/4} = \rho_1$.



Στο ρ_1: απλός πόλος.

$$\lim_{z\to\rho_1}(z-\rho_1)\cdot\frac{z^2}{1+z^4} = \rho_1^2\cdot\lim_{z\to\rho_1}\frac{z-\rho_1}{1+z^4} =$$

De L'Hospital

$$\Rightarrow \rho_1^2\cdot\lim_{z\to\rho_1}\frac{1}{4z^3} = \rho_1^2\cdot\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=\rho_1} =$$

$$= \rho_1^2\cdot\frac{1}{4\rho_1^3} = \frac{1}{4\rho_1} = \operatorname{Res}(f,\rho_1).$$

Όμοια: $\operatorname{Res}(f,\rho_2) = \dfrac{1}{4\rho_2}$.

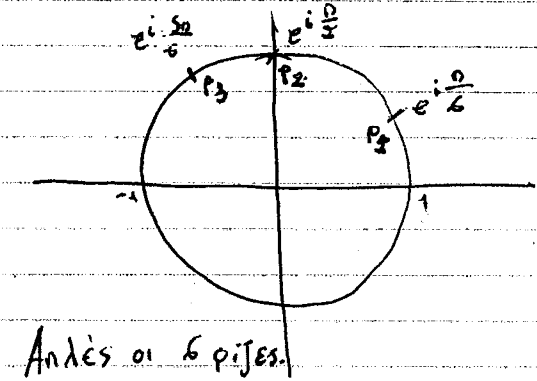
Και: $2\pi i\cdot\left(\dfrac{1}{4\rho_1}+\dfrac{1}{4\rho_2}\right) =$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot i\left(\rho_1^{-1}+\rho_2^{-1}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot i\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot i\,2i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(175)

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$



Απλές οι 6 ρίζες.

$$\operatorname{Res}(f,\rho) = \lim_{z\to\rho}\frac{(z-\rho)}{1+z^6} \overset{\text{De L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{z\to\rho}\frac{1}{6z^5}\Big|_{z=\rho} = \frac{1}{6\rho^5}.$$

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{6}\left(e^{-5\pi/6\cdot i} + e^{-i\cdot\frac{5\pi}{2}} + e^{-i\cdot\frac{25\pi}{6}}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$\rightarrow \alpha > 1.\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Θέτω:

$z = e^{i\theta}$.

$dz = i\cdot e^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

Άρα, $\boxed{d\theta = \frac{1}{iz}dz.}$

(176)

$z = e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

$\bar{z} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$

Άρα, $\cos\vartheta = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\bar{z})} \cdot \frac{1}{iz}\, dz$$

πρόβλημα, γιατί $\bar{z}$ δεν είναι ολόμορφο.

<u>Αλλά:</u> όταν $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Άρα, $I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \cdot \frac{1}{iz}\, dz$,

μπορώ εδώ να εφαρμόσω Res.

$$I = \frac{1}{i} \cdot \int_{|z|=1} \frac{1}{az + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{i} \cdot \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} =$$

ρίζες:

$$\frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

Μέσα στην ~~[illegible]~~ καμπύλη είναι η ρίζα με το +.
(η άλλη έχει Ind = 0, άρα δεν έχει νόημα να ασχοληθώ.)

(177)

$z_0 = -a + \sqrt{a^2-1} \longrightarrow$ πόλος τάξεως 1.

$$\text{Res} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z^2 + 2az + 1} \quad \underline{\text{De L'Hospital}}$$

$$= \frac{1}{2z + 2a}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_0 + a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Άρα, $I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

$\rightarrow$ Έστω $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$.

Ζητώ το $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - 2a\cos\vartheta + a^2}$ $\left(= \frac{2\pi}{1-a^2}\right)$

$\neq 0$ πάντα.

Θέτω $z = e^{i\vartheta}$. $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta = iz\, d\vartheta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{d\vartheta = \frac{1}{iz}\, dz}$.

$\cos\vartheta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Άρα:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2a \cdot \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) + a^2} \cdot \frac{1}{iz}\, dz =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \int_{|z|=1} \frac{1}{z - az^2 - a + a^2 z}\, dz =$$

(178)

$$= \frac{-1}{i} \cdot \int_{|z|=1} \frac{1}{\underbrace{a z^2 - (1+a^2) z + a}} \, dz$$

ρίζες:

$$\frac{1+a^2 \pm \sqrt{(1+a^2)^2 - 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1+a^2 \pm \sqrt{1+a^4+2a^2-4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1+a^2 \pm \sqrt{a^4-2a^2+1}}{2a} = \frac{1+a^2 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1+a^2 \pm (1-a^2)}{2a} = \frac{1}{a} \,/\, a.$$

μέσα στην περιοχή.

$$Res(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{\cancel{z-a}}{a\cancel{(z-a)}(z-\frac{1}{a})} =$$

$$= \lim_{z\to a} \frac{1}{a(z-\frac{1}{a})} = \frac{1}{a^2-1}.$$

Άρα, $I = -\frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}$.

→ R ρητή συνάρτηση, 2 μεταβλητές.

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta.$$

(179)

Θέτω $z = e^{i\theta}$, $d\theta = \frac{1}{iz} dz$,

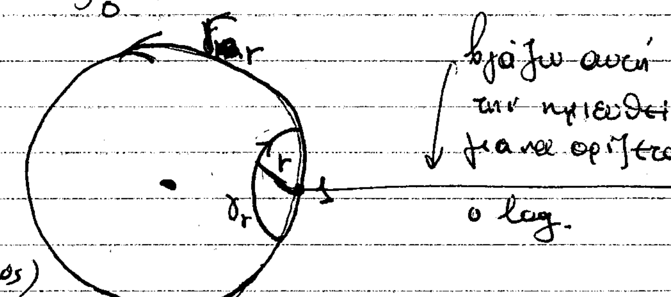
$\sin\theta = \frac{1}{2i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$,

οπότε:

$$I = \int_{|z|=1} \underbrace{\frac{R\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)}{z}}_{f} dz =$$

$$= \frac{1}{\cancel{i}} \cdot 2\pi \cancel{i} \left(\sum_{\substack{f(z_j)=\infty \\ |z_j|<1}} Res(f, z_j) \right).$$

→ Ν.Δ.Ο. $\int_0^{2\pi} \ln|1-e^{it}|\, dt = 0$.



βγάζω αυτή την ημιευθεία για να ορίζεται ο log.

(μιγαδικός)

$\log(1-e^{it}) = \ln|1-e^{it}| + i \cdot Arg(1-e^{it})$.

Άρα, $I = Re \int_0^{2\pi} \log(1-e^{it})\, dt =$

$\cancel{\lim_{r\to 0^+} \mathrm{Re}}$

Θέτω $e^{it} = z$. Τότε:

$dt = \frac{dz}{iz}$ και $I = \mathrm{Re} \int_{|z|=1} \frac{\log(1-z)}{iz} dz$.

Άρα, $J = \int_{|z|=1} \frac{\log(1-z)}{iz} dz =$

$= \lim_{r\to 0^+} \int_{\Gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz} dz$

Θεωρώ το $\int_{\Gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz} dz +$ — ίσο 0 ολόμορφη (λείπεται η ανωμαλία).

$+ \int_{\gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz}$

Είναι: $\int_{\Gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz} dz = 0$.

Άρα, αρκεί Ν.Δ.Ο.

$\int_{\gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Είναι: $\left| \int_{\gamma_r} \frac{\log(1-z)}{iz} dz \right| \leq \pi r \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \left[|\ln r| + \right.$

$\left. + c \right]$ $c \geq |\mathrm{Arg}(1-z)|$ φραγμένο

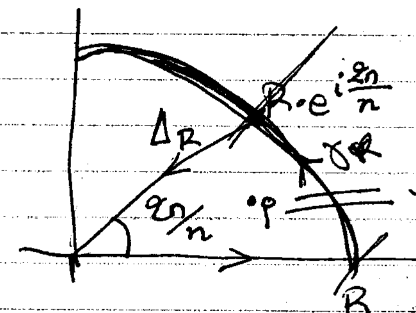
$= \frac{1}{1-r} \cdot \{ \pi \cdot |r \ln r| + \pi c r \} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

($\frac{1}{1-r} \to 1$, $|r\ln r| \to 0$, $\pi c r \to 0$ καθώς $r \to 0$; το r είναι "ισχυρότερο" του $\ln r$).

→ Για $n \geq 2$, Ν.Δ.Ο.

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \cdot \sin\frac{\pi}{n}}$.

$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$.



$R > 1$.

$p = e^{i\frac{\pi}{n}}$ (οι ρίζες μέσα στην καμπύλη).

$\int_{\text{καμπύλη}} = 2\pi i \,\mathrm{Res} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to p} \frac{z-p}{1+z^n} =$

$= 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{n \cdot z^{n-1}}\right|_{z=p} = -2\pi i \cdot \frac{p}{n} =$

$= -2\pi i \cdot e^{+\frac{i\pi}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$$\left|\frac{1}{1+z^n}\right| \le \frac{1}{|z|^n-1} = \frac{1}{R^n-1}$$ (182)

$$\left|\int_{\gamma_R} \dots\right| \le \frac{2\pi R}{n}\cdot\frac{1}{R^n-1} \xrightarrow[\substack{R\to+\infty \\ (n\geq 2)}]{} 0.$$

$z = t\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$, t από R ως 0.

$$\int_{A_R}\frac{dz}{1+z^n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}\int_{t=R}^{0}\frac{1}{1+t^n}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} -e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}\cdot I.$$

Άρα:

$$\left(1-e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)\cdot I = \frac{1}{n}\cdot 2\pi i\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{n}} \xrightarrow{\text{πραγματικά μέρη ίσα}}$$

$$\Rightarrow \left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdot I = \frac{1}{n}2\pi\cdot\sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow$$

$$\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{n}\cdot I = \pi\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

$\phi(f_2) = u x_1$

$\phi(f_1) = x_1 \Rightarrow \phi(u f_1) = u x_1$, $\phi(u f_1 + f_2) = 0$

$F/\ker\phi \cong \langle \bar{f} + \ker\phi\rangle$ (183)

$\phi(u f_1) = 0$, $u\phi(f_1) = 0$, $u x_1 = 0$

Δουλειά/Θεωρία και πρόσωπα

18/1/08.

$u x_1 + x_1 = 0$

$(u+1)x_1 = 0$

$d_1 \mid u+1$

$F \to R \to \langle x_1\rangle$ ελεύθερο!!!

$\langle x_1 \rangle \cong M$ κυκλικό.

$\langle f_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle f_n\rangle$ $\quad \bar{f}_1 \to x_1$

$d_1, d_2, d_3, \dots, d_s$

$R \cong \langle f_1\rangle$.

$F = R \oplus \ker f$, $R = \langle f_1\rangle$, $(f_2', \dots, f_s')$ βάση του $\ker f$.

$f_1, f_2', \dots, f_s'$ βάση: $\quad f_1 \to x_1$

$f_2', \dots, f_s' \to 0 \in M$

αφού $f(f_i') = 0 \in R$, $\forall i \geq 2$.

$f: F \to M = \underbrace{\langle x_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n\rangle}_{M'}$.

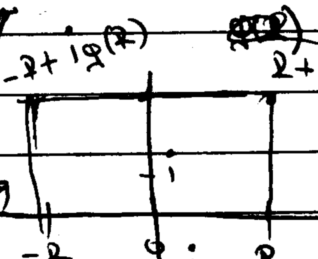
ΜΙΓΑΔΙΚΗ / 22/01/08 / Μάθημα 28

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \pi/e \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} = \pi/e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Ερώτημα: Υπάρχουν τα ολοκληρώματα;

$$\int_{1}^{\infty} = \lim \int_{1}^{R} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{R} = 1 - \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$$, άρα υπάρχει

$$\frac{e^{iz}}{1+z^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$$



Παίρνω ύψος $g(R) > 1$ έτσι ώστε να είναι την κορυφή

$$\oint = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx + \int_{R}^{R+ig(R)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz +$$

$$+ \int_{R+ig(R)}^{-R+ig(R)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{-R+ig(R)}^{-R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz =$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2i} = \pi/e$$

Τώρα,

$$\left|\int_{[R,\,R+ig(R)]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| \le g(R)\cdot \sup_{z\in[R,\,R+ig(R)]} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \le g(R)\cdot\frac{1}{R^2-1}$$

$$\max_{y\in[0,g(R)]} e^{-y} = 1$$

$$\frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z|^2-1} \le \frac{1}{R^2-1}$$

Για $g(R) = R$: $\downarrow$ διότι $g(R)=R$ και $R\to\infty$

0

Όμοια για το τελευταίο: $\displaystyle\int_{[-R+ig(R),\,-R]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$

το $g(R)=R$ κάνει τη δουλειά

• $$\left|\int_{[R+ig(R),\,-R+ig(R)]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| \le 2R\cdot\frac{e^{-g(R)}}{(g(R))^2-1} \xrightarrow[\text{για } g(R)=R]{R\to\infty} 0$$

$\updownarrow$ εδώ $z=x+ig(R)$, $x\in[-R,R]$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2$$

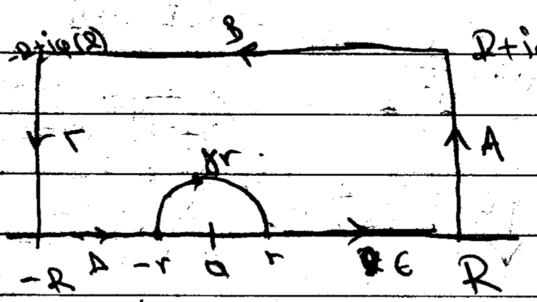
$\frac{1}{x}$ φθίνει στο 0

$\sin x$ έχει φραγμένο ολοκλήρωμα

$\Big\}\Rightarrow \exists$ το ολοκλήρωμα (ανάλογο του Dirichlet για σειρές)

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0^+}} \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Im}\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0^+}} \int_r^R \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$



$\displaystyle\int_A \le g(R)\cdot\frac{1}{R}$

$\displaystyle\int_\Gamma \le g(R)\cdot\frac{1}{R}$

(Θα βρω τελικά $g(R)=\sqrt{R}$)

$$\int_B \le 2R \cdot \frac{e^{-g(R)}}{g(R)}$$

$$\int_r = \int_\epsilon = I$$

$Ind = 0$

$$\int_{\gamma r} \xrightarrow[r\to 0]{} -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \, Res\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = -\pi i \cdot 1 = -\pi i$$

Οπότε συνολικά έχω $Im \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} = 2I - \pi = 0$

Παρατήρηση: Όταν ο πόλος είναι απλός και ολοκληρώνω σε τμήμα περιφέρειας γύρω από τον πόλο (ας πούμε στο $z = re^{it}$, $\alpha \le t \le B$) και πάρω $r \to 0$ έχω:

$f(z) = \frac{A}{z} + h(z)$, h ολόμορφη στο 0

$c: \{z = re^{it}, \quad \alpha \le t \le B\}$, $B - \alpha \le 2\pi$

$$\int_c \frac{A}{z} + h(z)\, dz = \int_c h(z) \cdot dz + A \int_c \frac{dz}{z}$$

Αν πάρω $r \to 0$: $\int h(z) dz \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

$$A \cdot \int_{t=\alpha}^{B} \frac{i\cancel{re^{it}}}{\cancel{re^{it}}} dt = Ai(B-\alpha) = 2\pi i A \cdot \frac{(B-\alpha)}{2\pi}$$

$A = Res(f(z),$

$$\boxed{2\pi i \cdot Res(f, 0) \cdot \text{{κλάσμα του}} \int}$$

Ασκήσεις (μεταπτυχιακού)

Σ1) f ακέραια, $f(z) \ne 0 \ \forall z \in [\gamma]$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = ;$$

$[\gamma]$ συμπαγές $\Rightarrow$ φραγμένο $\Rightarrow$ $[\gamma] \subseteq D(0,R)$, $R > 0$

No.
Date

$f: D(0,R) \to \mathbb{C}$
Η f έχει πεπ. πλήθος ριζών στο $D(0,R)$

$A = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$ οι ρίζες της f στο $D(0,R)$
Από γνωστό θεώρημα, υπάρχει μοναδική $g: D(0,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη χωρίς ρίζες στο $D(0,R)$ ώστε
$f(z) = (z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_n)\cdot g(z)$

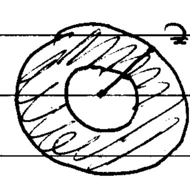
$$f'(z) = \big((z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_n)\big)' g(z) + \big((z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_n)\big) g'(z) =$$
$$= \big[(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_n) + (z-\rho_1)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_n) + \ldots + (z-\rho_1)\cdots(z-\rho_{n-1})\big] g(z) +$$
$$+ \big((z-\rho_1)\cdots(z-\rho_n)\big) g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-\rho_1} + \frac{1}{z-\rho_2} + \ldots + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{z-\rho_1} + \frac{1}{z-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{z-\rho_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right) dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma \frac{1}{z-\rho_i}\,dz + \underbrace{\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}}_{=0} = \lambda 2\pi i \quad , \lambda \in \mathbb{Z}$$

Ζ) $f: \Delta(0,1,2) \to \mathbb{C}$
$z = f(z)^2 \ \forall z$



$$z' = \left(f(z)^2\right)' = 2 f(z) f'(z)$$
$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2f(z)^2} = \frac{1}{2z}$$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_\gamma \frac{1}{2z}\,dz = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \pi i$$

$\left(\begin{array}{c}\gamma \in C(0,\rho) \\ 1<\rho<2\end{array}\right)$

Από προηγ. άσκηση:
$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \lambda \cdot 2\pi i \Rightarrow \lambda = 1/2$ άτοπο
Άρα $\nexists$ τέτοια ολόμορφη συνάρτηση

N.Σ.ο.

33) $\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos t}\cos(\alpha\sin t)\,dt = \pi$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

Αν $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, σταθερό

$f_{\alpha_0}(t) = e^{\alpha_0\cos t}\cos(\alpha_0 \sin t)$

$f_{\alpha_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f_{\alpha_0}(2\pi - t) = -f_{\alpha_0}(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$

$\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = 2\pi - t$

$\varphi([0,\pi]) \to [\pi, 2\pi]$

$f_{\alpha_0} : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$

Από το Θεώρημα αντικατάστασης:

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} ((f\circ\varphi)\,\varphi')(t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha_0 z}}{z}\,dz \overset{\text{με τον ορισμό}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha_0 \gamma(t)}}{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\alpha_0\cos t}\cdot\cos(\alpha_0 \sin t)\,dt}_{=2\pi} + i\int_0^{2\pi} e^{\alpha_0\cos t}\cdot\sin(\alpha_0\sin t)\,dt$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha_0 z}}{z}\,dz = 2\pi i e^{\alpha_0 \cdot 0} = 2\pi i$$

από ολοκλ. τύπο Cauchy

Θεωρούμε τώρα $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cdot \cos(\alpha \sin t)\, dt$$

Θεώρημα 6.10.3

Έστω $f: [\alpha,\beta] \times D \to \mathbb{C}$, συνεχής
D τόπος ώστε για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$ η $f_t(z) = f(t,z)$
είναι ολόμορφη
Τότε η συνάρτηση $F: D \to \mathbb{C}$, $F(z) = \int_\alpha^\beta f(t,z)\, dt$
είναι ολόμορφη

Όπου παίρνουμε $f(t,z) = e^{z\cos t} \cdot \cos(z \sin t)$
Και άρα F ακέραια
Και στο $\mathbb{R}$ είναι σταθερή και ίση με π $\Rightarrow F(z) = \pi \ \forall z \in \mathbb{C}$