

ΜΙΓΑΛΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 10/01/08 / Μαθημα 25

Πολλαπλασιαστικά Πόλοι

Έστω το α είναι πόλος για την f

1) $\exists N_1 \geq 1$ και g αναπτυγμένη σε σειρά με κέντρο α με $g(\alpha) \neq 0$ και $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{N_1}}$ σε σειρά εκτός από το $z=\alpha$

2) Το σύνολο $\{n < 0 : a_n \neq 0\}$ είναι finite και τελεγματικό
Θέτουμε $N_2 = -\max\{n < 0 : a_n \neq 0\}$
Τότε $N_1 = N_2$ παντού και αναπτύσσεται πολλαπλασιαστικά εν
πόλο α για την f .

Απόδειξη

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-\alpha)^j + \dots$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{N_1}} = \frac{c_0}{(z-\alpha)^{N_1}} + \frac{c_1}{(z-\alpha)^{N_1-1}} + \dots \Rightarrow \underline{N_1 = N_2}$$

Μετατρέψτε \rightarrow από συνάρτηση αναπτυγμένης Laurent για το N_2 .

Άλλος τρόπος: $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{N_1}} = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{N_1}}$

με $N_2 > N_1$ τότε πολλαπλασιάζουμε με $(z-\alpha)^{N_2}$ έχουμε:
 $f(z) \cdot (z-\alpha)^{N_2-N_1} = g(z) \cdot (z-\alpha)^{N_2-N_1}$
 $g(\alpha) = 0$ Αυτό γιατί $g(\alpha) \neq 0$

Παρατηρήσεις:

Οι πολλαπλασιαστικοί πόλοι α για την $f(z)$ είναι ίδιοι με τον πολλαπλασιαστικό της $1/f$.

Αν α πόλος ή επώσιμος αναπόλια για την f τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $(z-\alpha)^n \cdot f(z)$ να έχει επώσιμη αναπόλια στο α .

Αν όμως α ουσίως αναπόλια για την f , τότε και $n(z-\alpha)^n f(z)$ έχει ουσίως αναπόλια στο α για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα:

$$e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

Av $z \in \mathbb{R}$

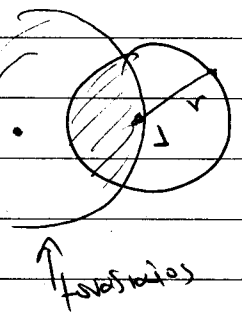
$$e^{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow e^{+\infty} = \infty$$

$$e^{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

additios

$$e^{\frac{z-1+z}{z-1}} = e^{1 + \frac{z}{z-1}} = e \cdot e^{\frac{z}{z-1}} = e \left[1 + \frac{z}{z-1} + \frac{z^2}{2(z-1)^2} + \dots \right]$$

↑
συντελεστές αναπτύσσονται από



Η τιμή της συνάρτησης f είναι εικόνα του $B(z, r)$ όταν z είναι στο \mathbb{C} , άρα μη γραμμική.

Παράδειγμα $(z-1)e^{\frac{z+1}{z-1}}$ έχει πολύ απλά χαρακτηριστικά
 Θεωρεί $g(z) = (z-1)e^{\frac{z+1}{z-1}}$. Τότε $g(B(z, r))$ παρουσιάζει φασόλια.

Στη φασόλια n f είναι γραμμική.

$$\left| e^{\frac{z+1}{z-1}} \right| = e^{\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-1}} = e^{\operatorname{Re} \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2}} = e^{\operatorname{Re} \frac{|z|^2 + \bar{z} - z - 1}{|z-1|^2}} = e^{\frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2}} \leq e^0 = 1$$

Άρα είναι γραμμική στο φασόλια.

Επιλέξτε "ένα ή και γειτονία" του 1 είναι γραμμική n f .
 Όταν το z είναι στο 1 που είναι στη φασόλια τότε το πιο εύκολο είναι να φανταστούμε ότι g είναι γραμμική, και συνεπώς θα υπάρχει συνεχής αναπαράσταση της g στο 1.

Άσκηση:

- 1) Έστω $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ομομορφία και γραμμική. Τότε g σταθερή. (αρκεί να \rightarrow αναπαράσταση συνεχής)

2) $g: \mathbb{C} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και γραμμική \Rightarrow σταθερή

3) $g: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Αν προειδοίται οι ολόμορφες $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ τότε $|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall z \neq 0$

!!! Θεώρημα \Rightarrow Το f είναι σταθερή ή για είναι τελεστής αμοιβαία για την $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$ (Από το ότι οι πόλοι της g να αντιστοιχούν στο f είναι. Αλλιώς οι πόλοι της g από την ανάλυση Laurent ή από το 0 ή στο ∞ να αντιστοιχούν)
 Στα σημεία που η g μηδενίζεται (~~οι πόλοι της g~~ τα z_k) η $\frac{f}{g}$ είναι τελεστής αμοιβαία και τελικά επαρκούν, καθώς $|\frac{f}{g}| \leq 1$

Από τελικά η $\frac{f}{g}$ ολόμορφη και γραμμική στο $\mathbb{C} - \{0\}$

Σύμφωνα το 0 είναι τελεστής αμοιβαία (και επαρκούν)

Από τελικά $\frac{f}{g}$ αλγεβρική και γραμμική και συνεπώς σταθερή.

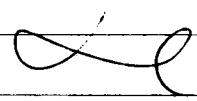
$\frac{f}{g} = c, \quad |c| \leq 1$

$f = c \cdot g, \quad |c| \leq 1$

1) $g: \mathbb{C} - \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη $g \neq 0$ Αν προειδοίται οι ολόμορφες f στο $\mathbb{C} - \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$ τότε $|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{z\}$

\Rightarrow ομομορφή

Από τα 0 οι αλγεβρικοί δεν είναι τελεστές αμοιβαίας



0 casos

f, g ολόμορφη στο 0

$g \neq 0$

Τότε $\frac{f}{g}$ ολόμορφη ολόμορφη στο $0 - \{z \in 0 \cdot g(z) = 0\}$

A $z_0 \in \mathbb{C}$ je $g(z_0) = 0$ rone n $\frac{f}{g}$ Exce tefawfem awafadix sto z_0 .

Tote to z_0 xer fropel wa ebu awafadix awafadix ja tin $\frac{f}{g}$.

A $f(z_0) \neq 0$ rone $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty \Rightarrow$ ~~no~~ ∞

Estu $f(z_0) = 0$ wa $f \neq 0$

Exaple $f(z) = (z - z_0)^{N_1} \cdot q(z)$ je q otoloppu sto z_0 wa $q(z_0) \neq 0$, $N_1 \rightarrow n$ modertunne tus pilas

Apr $g(z) = (z - z_0)^{N_2} \cdot w(z)$ otu $w(z_0) \neq 0$, w otoloppu sto z_0

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{N_1 - N_2} \left(\frac{q(z)}{w(z)} \right)$$

$z \rightarrow z_0$

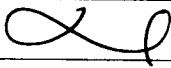
$$\left. \frac{q(z_0)}{w(z_0)} \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

otote $N_1 > N_2 \rightarrow$ awafadix wa fawfem pilas

wa $N_1 < N_2 \rightarrow$ ∞

wa $N_1 = N_2 \rightarrow$ zeng sto \mathbb{C} , awafadix wa tin pilas

Apr petow awafadix $\frac{f}{g}$ bejewa fawfem pilas
je qm f, g otoloppes
O awafadix awafadix sto xaw awafadix awafadix



o rone, f, g modertunne sto z_0 , $g \neq 0$
~~no~~ $(z - p_1)^{k_1} + \dots + (z - p_n)^{k_n}$ pilas awafadix
 $(z - p_1)^{k_1} \dots (z - p_n)^{k_n}$

o pilas awafadix ebu fawfem pilas

Άσκηση

Έστω $\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ και $f: \mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ ομομορφική
Υποθέτουμε ότι κάθε z_i ~~είναι~~ είναι η πόλος η
ουσιώδης αγωγάδα.

Αν $\alpha \in \mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ τότε α είναι τ'κός σίκο χείρας α
n f αναλυτός σε Σωφισμα. Τότε n αριθμ συχθίως
είναι $R = \min_{k=1, \dots, n} |\alpha - z_k|$

Ξέρουμε ότι $R \geq \min_{k=1, \dots, n} |z_k - \alpha|$

Έστω ότι $R > \min_{k=1, \dots, n} |z_k - \alpha|$ (Οα καταλήγουμε σε αόριστο.)

Τότε n Σωφισμαί δε αμ'ε αβόλεση σωφισμαί ∇ σε σίκο ηw
γερίχα το z_0 (αυτοί τινι εβαχίως απαγορεύει)

Η g ηε τινι f δε σωφισμαί στο τ'κός σίκο α
Από αμ'ι αναλυτός σωφισμαί \rightarrow αβόλεση ηαμ'ι.

Από το z_0 ο,τι εβος αγωγάδα είναι ηε τινι f, δε
είναι ηε ηε τινι g.

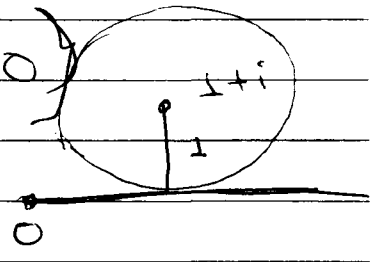
Για τινι g ομ'ι είναι επωσάμ'ι. Από
 α

Αντί να ιαχέι γενικά (ου συνάμ'ι n αριθμ είναι n
αποσάμ'ι αμ'ι το σωφισμαί 0)

Έστω D_{α} στο $\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ αμ'ι το 0)

Έστω $\alpha = 1+i$

Τότε n αριθμ συχθίως είναι $\sqrt{2}$ αμ'
n αποσάμ'ι αμ'ι το σωφισμαί είναι 1



Το άθροισμα δείχνει λειτουργία αναλυτική για τον f αν υπάρχει $D(c, r, +\infty)$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ώστε f ορίζεται στο $D(c, r, +\infty)$

Τότε έχουμε αναπτύξη Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-c)^n$
 όπου $a_n = a_n(f, c, r)$

Παρατήρηση:

Αν υπάρχει ένα τέτοιο C , τότε όλα τα c έχουν και εσφαλότερα τμήμα να πάρει $C=0$

Ορισμός: Το είδος μιας αναλυτικής στο ∞ πηλίτου να είναι το είδος της αναλυτικής στο 0 του $f(\frac{1}{z})$

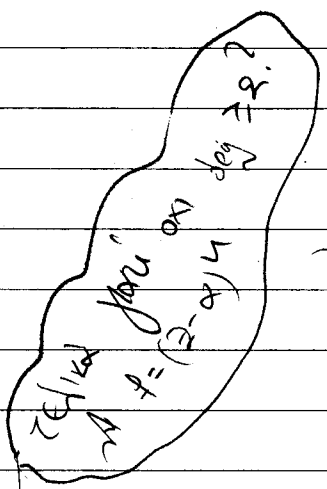
(Γενικότερα το c για τον $f(\frac{1}{z-c})$)

Αναπτύξεις Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, |z| > r$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m} z^m$$

Η e^z έχει ουσίως αναλυτική στο ∞

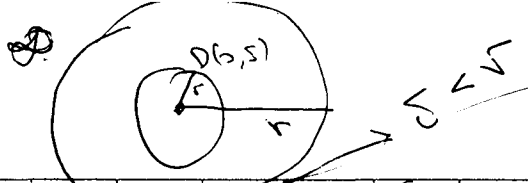


Απόδειξη: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αρέματα και $z \rightarrow 1/z$, τότε n f είναι γραμμική, $f = Az + B$, $A \neq 0$.

Απόδειξη

Αντι f αρέματα, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

Αν υπάρχει ουσίως ∞ , τότε f είναι ∞ ή 0 ή z ή $1/z$ ή z^2 ή $1/z^2$ ή z^3 ή $1/z^3$ ή z^4 ή $1/z^4$ ή z^5 ή $1/z^5$ ή z^6 ή $1/z^6$ ή z^7 ή $1/z^7$ ή z^8 ή $1/z^8$ ή z^9 ή $1/z^9$ ή z^{10} ή $1/z^{10}$ ή z^{11} ή $1/z^{11}$ ή z^{12} ή $1/z^{12}$ ή z^{13} ή $1/z^{13}$ ή z^{14} ή $1/z^{14}$ ή z^{15} ή $1/z^{15}$ ή z^{16} ή $1/z^{16}$ ή z^{17} ή $1/z^{17}$ ή z^{18} ή $1/z^{18}$ ή z^{19} ή $1/z^{19}$ ή z^{20} ή $1/z^{20}$ ή z^{21} ή $1/z^{21}$ ή z^{22} ή $1/z^{22}$ ή z^{23} ή $1/z^{23}$ ή z^{24} ή $1/z^{24}$ ή z^{25} ή $1/z^{25}$ ή z^{26} ή $1/z^{26}$ ή z^{27} ή $1/z^{27}$ ή z^{28} ή $1/z^{28}$ ή z^{29} ή $1/z^{29}$ ή z^{30} ή $1/z^{30}$ ή z^{31} ή $1/z^{31}$ ή z^{32} ή $1/z^{32}$ ή z^{33} ή $1/z^{33}$ ή z^{34} ή $1/z^{34}$ ή z^{35} ή $1/z^{35}$ ή z^{36} ή $1/z^{36}$ ή z^{37} ή $1/z^{37}$ ή z^{38} ή $1/z^{38}$ ή z^{39} ή $1/z^{39}$ ή z^{40} ή $1/z^{40}$ ή z^{41} ή $1/z^{41}$ ή z^{42} ή $1/z^{42}$ ή z^{43} ή $1/z^{43}$ ή z^{44} ή $1/z^{44}$ ή z^{45} ή $1/z^{45}$ ή z^{46} ή $1/z^{46}$ ή z^{47} ή $1/z^{47}$ ή z^{48} ή $1/z^{48}$ ή z^{49} ή $1/z^{49}$ ή z^{50} ή $1/z^{50}$ ή z^{51} ή $1/z^{51}$ ή z^{52} ή $1/z^{52}$ ή z^{53} ή $1/z^{53}$ ή z^{54} ή $1/z^{54}$ ή z^{55} ή $1/z^{55}$ ή z^{56} ή $1/z^{56}$ ή z^{57} ή $1/z^{57}$ ή z^{58} ή $1/z^{58}$ ή z^{59} ή $1/z^{59}$ ή z^{60} ή $1/z^{60}$ ή z^{61} ή $1/z^{61}$ ή z^{62} ή $1/z^{62}$ ή z^{63} ή $1/z^{63}$ ή z^{64} ή $1/z^{64}$ ή z^{65} ή $1/z^{65}$ ή z^{66} ή $1/z^{66}$ ή z^{67} ή $1/z^{67}$ ή z^{68} ή $1/z^{68}$ ή z^{69} ή $1/z^{69}$ ή z^{70} ή $1/z^{70}$ ή z^{71} ή $1/z^{71}$ ή z^{72} ή $1/z^{72}$ ή z^{73} ή $1/z^{73}$ ή z^{74} ή $1/z^{74}$ ή z^{75} ή $1/z^{75}$ ή z^{76} ή $1/z^{76}$ ή z^{77} ή $1/z^{77}$ ή z^{78} ή $1/z^{78}$ ή z^{79} ή $1/z^{79}$ ή z^{80} ή $1/z^{80}$ ή z^{81} ή $1/z^{81}$ ή z^{82} ή $1/z^{82}$ ή z^{83} ή $1/z^{83}$ ή z^{84} ή $1/z^{84}$ ή z^{85} ή $1/z^{85}$ ή z^{86} ή $1/z^{86}$ ή z^{87} ή $1/z^{87}$ ή z^{88} ή $1/z^{88}$ ή z^{89} ή $1/z^{89}$ ή z^{90} ή $1/z^{90}$ ή z^{91} ή $1/z^{91}$ ή z^{92} ή $1/z^{92}$ ή z^{93} ή $1/z^{93}$ ή z^{94} ή $1/z^{94}$ ή z^{95} ή $1/z^{95}$ ή z^{96} ή $1/z^{96}$ ή z^{97} ή $1/z^{97}$ ή z^{98} ή $1/z^{98}$ ή z^{99} ή $1/z^{99}$ ή z^{100} ή $1/z^{100}$ ή z^{101} ή $1/z^{101}$ ή z^{102} ή $1/z^{102}$ ή z^{103} ή $1/z^{103}$ ή z^{104} ή $1/z^{104}$ ή z^{105} ή $1/z^{105}$ ή z^{106} ή $1/z^{106}$ ή z^{107} ή $1/z^{107}$ ή z^{108} ή $1/z^{108}$ ή z^{109} ή $1/z^{109}$ ή z^{110} ή $1/z^{110}$ ή z^{111} ή $1/z^{111}$ ή z^{112} ή $1/z^{112}$ ή z^{113} ή $1/z^{113}$ ή z^{114} ή $1/z^{114}$ ή z^{115} ή $1/z^{115}$ ή z^{116} ή $1/z^{116}$ ή z^{117} ή $1/z^{117}$ ή z^{118} ή $1/z^{118}$ ή z^{119} ή $1/z^{119}$ ή z^{120} ή $1/z^{120}$ ή z^{121} ή $1/z^{121}$ ή z^{122} ή $1/z^{122}$ ή z^{123} ή $1/z^{123}$ ή z^{124} ή $1/z^{124}$ ή z^{125} ή $1/z^{125}$ ή z^{126} ή $1/z^{126}$ ή z^{127} ή $1/z^{127}$ ή z^{128} ή $1/z^{128}$ ή z^{129} ή $1/z^{129}$ ή z^{130} ή $1/z^{130}$ ή z^{131} ή $1/z^{131}$ ή z^{132} ή $1/z^{132}$ ή z^{133} ή $1/z^{133}$ ή z^{134} ή $1/z^{134}$ ή z^{135} ή $1/z^{135}$ ή z^{136} ή $1/z^{136}$ ή z^{137} ή $1/z^{137}$ ή z^{138} ή $1/z^{138}$ ή z^{139} ή $1/z^{139}$ ή z^{140} ή $1/z^{140}$ ή z^{141} ή $1/z^{141}$ ή z^{142} ή $1/z^{142}$ ή z^{143} ή $1/z^{143}$ ή z^{144} ή $1/z^{144}$ ή z^{145} ή $1/z^{145}$ ή z^{146} ή $1/z^{146}$ ή z^{147} ή $1/z^{147}$ ή z^{148} ή $1/z^{148}$ ή z^{149} ή $1/z^{149}$ ή z^{150} ή $1/z^{150}$ ή z^{151} ή $1/z^{151}$ ή z^{152} ή $1/z^{152}$ ή z^{153} ή $1/z^{153}$ ή z^{154} ή $1/z^{154}$ ή z^{155} ή $1/z^{155}$ ή z^{156} ή $1/z^{156}$ ή z^{157} ή $1/z^{157}$ ή z^{158} ή $1/z^{158}$ ή z^{159} ή $1/z^{159}$ ή z^{160} ή $1/z^{160}$ ή z^{161} ή $1/z^{161}$ ή z^{162} ή $1/z^{162}$ ή z^{163} ή $1/z^{163}$ ή z^{164} ή $1/z^{164}$ ή z^{165} ή $1/z^{165}$ ή z^{166} ή $1/z^{166}$ ή z^{167} ή $1/z^{167}$ ή z^{168} ή $1/z^{168}$ ή z^{169} ή $1/z^{169}$ ή z^{170} ή $1/z^{170}$ ή z^{171} ή $1/z^{171}$ ή z^{172} ή $1/z^{172}$ ή z^{173} ή $1/z^{173}$ ή z^{174} ή $1/z^{174}$ ή z^{175} ή $1/z^{175}$ ή z^{176} ή $1/z^{176}$ ή z^{177} ή $1/z^{177}$ ή z^{178} ή $1/z^{178}$ ή z^{179} ή $1/z^{179}$ ή z^{180} ή $1/z^{180}$ ή z^{181} ή $1/z^{181}$ ή z^{182} ή $1/z^{182}$ ή z^{183} ή $1/z^{183}$ ή z^{184} ή $1/z^{184}$ ή z^{185} ή $1/z^{185}$ ή z^{186} ή $1/z^{186}$ ή z^{187} ή $1/z^{187}$ ή z^{188} ή $1/z^{188}$ ή z^{189} ή $1/z^{189}$ ή z^{190} ή $1/z^{190}$ ή z^{191} ή $1/z^{191}$ ή z^{192} ή $1/z^{192}$ ή z^{193} ή $1/z^{193}$ ή z^{194} ή $1/z^{194}$ ή z^{195} ή $1/z^{195}$ ή z^{196} ή $1/z^{196}$ ή z^{197} ή $1/z^{197}$ ή z^{198} ή $1/z^{198}$ ή z^{199} ή $1/z^{199}$ ή z^{200} ή $1/z^{200}$ ή z^{201} ή $1/z^{201}$ ή z^{202} ή $1/z^{202}$ ή z^{203} ή $1/z^{203}$ ή z^{204} ή $1/z^{204}$ ή z^{205} ή $1/z^{205}$ ή z^{206} ή $1/z^{206}$ ή z^{207} ή $1/z^{207}$ ή z^{208} ή $1/z^{208}$ ή z^{209} ή $1/z^{209}$ ή z^{210} ή $1/z^{210}$ ή z^{211} ή $1/z^{211}$ ή z^{212} ή $1/z^{212}$ ή z^{213} ή $1/z^{213}$ ή z^{214} ή $1/z^{214}$ ή z^{215} ή $1/z^{215}$ ή z^{216} ή $1/z^{216}$ ή z^{217} ή $1/z^{217}$ ή z^{218} ή $1/z^{218}$ ή z^{219} ή $1/z^{219}$ ή z^{220} ή $1/z^{220}$ ή z^{221} ή $1/z^{221}$ ή z^{222} ή $1/z^{222}$ ή z^{223} ή $1/z^{223}$ ή z^{224} ή $1/z^{224}$ ή z^{225} ή $1/z^{225}$ ή z^{226} ή $1/z^{226}$ ή z^{227} ή $1/z^{227}$ ή z^{228} ή $1/z^{228}$ ή z^{229} ή $1/z^{229}$ ή z^{230} ή $1/z^{230}$ ή z^{231} ή $1/z^{231}$ ή z^{232} ή $1/z^{232}$ ή z^{233} ή $1/z^{233}$ ή z^{234} ή $1/z^{234}$ ή z^{235} ή $1/z^{235}$ ή z^{236} ή $1/z^{236}$ ή z^{237} ή $1/z^{237}$ ή z^{238} ή $1/z^{238}$ ή z^{239} ή $1/z^{239}$ ή z^{240} ή $1/z^{240}$ ή z^{241} ή $1/z^{241}$ ή z^{242} ή $1/z^{242}$ ή z^{243} ή $1/z^{243}$ ή z^{244} ή $1/z^{244}$ ή z^{245} ή $1/z^{245}$ ή z^{246} ή $1/z^{246}$ ή z^{247} ή $1/z^{247}$ ή z^{248} ή $1/z^{248}$ ή z^{249} ή $1/z^{249}$ ή z^{250} ή $1/z^{250}$ ή z^{251} ή $1/z^{251}$ ή z^{252} ή $1/z^{252}$ ή z^{253} ή $1/z^{253}$ ή z^{254} ή $1/z^{254}$ ή z^{255} ή $1/z^{255}$ ή z^{256} ή $1/z^{256}$ ή z^{257} ή $1/z^{257}$ ή z^{258} ή $1/z^{258}$ ή z^{259} ή $1/z^{259}$ ή z^{260} ή $1/z^{260}$ ή z^{261} ή $1/z^{261}$ ή z^{262} ή $1/z^{262}$ ή z^{263} ή $1/z^{263}$ ή z^{264} ή $1/z^{264}$ ή z^{265} ή $1/z^{265}$ ή z^{266} ή $1/z^{266}$ ή z^{267} ή $1/z^{267}$ ή z^{268} ή $1/z^{268}$ ή z^{269} ή $1/z^{269}$ ή z^{270} ή $1/z^{270}$ ή z^{271} ή $1/z^{271}$ ή z^{272} ή $1/z^{272}$ ή z^{273} ή $1/z^{273}$ ή z^{274} ή $1/z^{274}$ ή z^{275} ή $1/z^{275}$ ή z^{276} ή $1/z^{276}$ ή z^{277} ή $1/z^{277}$ ή z^{278} ή $1/z^{278}$ ή z^{279} ή $1/z^{279}$ ή z^{280} ή $1/z^{280}$ ή z^{281} ή $1/z^{281}$ ή z^{282} ή $1/z^{282}$ ή z^{283} ή $1/z^{283}$ ή z^{284} ή $1/z^{284}$ ή z^{285} ή $1/z^{285}$ ή z^{286} ή $1/z^{286}$ ή z^{287} ή $1/z^{287}$ ή z^{288} ή $1/z^{288}$ ή z^{289} ή $1/z^{289}$ ή z^{290} ή $1/z^{290}$ ή z^{291} ή $1/z^{291}$ ή z^{292} ή $1/z^{292}$ ή z^{293} ή $1/z^{293}$ ή z^{294} ή $1/z^{294}$ ή z^{295} ή $1/z^{295}$ ή z^{296} ή $1/z^{296}$ ή z^{297} ή $1/z^{297}$ ή z^{298} ή $1/z^{298}$ ή z^{299} ή $1/z^{299}$ ή z^{300} ή $1/z^{300}$ ή z^{301} ή $1/z^{301}$ ή z^{302} ή $1/z^{302}$ ή z^{303} ή $1/z^{303}$ ή z^{304} ή $1/z^{304}$ ή z^{305} ή $1/z^{305}$ ή z^{306} ή $1/z^{306}$ ή z^{307} ή $1/z^{307}$ ή z^{308} ή $1/z^{308}$ ή z^{309} ή $1/z^{309}$ ή z^{310} ή $1/z^{310}$ ή z^{311} ή $1/z^{311}$ ή z^{312} ή $1/z^{312}$ ή z^{313} ή $1/z^{313}$ ή z^{314} ή $1/z^{314}$ ή z^{315} ή $1/z^{315}$ ή z^{316} ή $1/z^{316}$ ή z^{317} ή $1/z^{317}$ ή z^{318} ή $1/z^{318}$ ή z^{319} ή $1/z^{319}$ ή z^{320} ή $1/z^{320}$ ή z^{321} ή $1/z^{321}$ ή z^{322} ή $1/z^{322}$ ή z^{323} ή $1/z^{323}$ ή z^{324} ή $1/z^{324}$ ή z^{325} ή $1/z^{325}$ ή z^{326} ή $1/z^{326}$ ή z^{327} ή $1/z^{327}$ ή z^{328} ή $1/z^{328}$ ή z^{329} ή $1/z^{329}$ ή z^{330} ή $1/z^{330}$ ή z^{331} ή $1/z^{331}$ ή z^{332} ή $1/z^{332}$ ή z^{333} ή $1/z^{333}$ ή z^{334} ή $1/z^{334}$ ή z^{335} ή $1/z^{335}$ ή z^{336} ή $1/z^{336}$ ή z^{337} ή $1/z^{337}$ ή z^{338} ή $1/z^{338}$ ή z^{339} ή $1/z^{339}$ ή z^{340} ή $1/z^{340}$ ή z^{341} ή $1/z^{341}$ ή z^{342} ή $1/z^{342}$ ή z^{343} ή $1/z^{343}$ ή z^{344} ή $1/z^{344}$ ή z^{345} ή $1/z^{345}$ ή z^{346} ή $1/z^{346}$ ή z^{347} ή $1/z^{347}$ ή z^{348} ή $1/z^{348}$ ή z^{349} ή $1/z^{349}$ ή z^{350} ή $1/z^{350}$ ή z^{351} ή $1/z^{351}$ ή z^{352} ή $1/z^{352}$ ή z^{353} ή $1/z^{353}$ ή z^{354} ή $1/z^{354}$ ή z^{355} ή $1/z^{355}$ ή z^{356} ή $1/z^{356}$ ή z^{357} ή $1/z^{357}$ ή z^{358} ή $1/z^{358}$ ή z^{359} ή $1/z^{359}$ ή z^{360} ή $1/z^{360}$ ή z^{361} ή $1/z^{361}$ ή z^{362} ή $1/z^{362}$ ή z^{363} ή $1/z^{363}$ ή z^{364} ή $1/z^{364}$ ή z^{365} ή $1/z^{365}$ ή z^{366} ή $1/z^{366}$ ή z^{367} ή $1/z^{367}$ ή z^{368} ή $1/z^{368}$ ή z^{369} ή $1/z^{369}$ ή z^{370} ή $1/z^{370}$ ή z^{371} ή $1/z^{371}$ ή z^{372} ή $1/z^{372}$ ή z^{373} ή $1/z^{373}$ ή z^{374} ή $1/z^{374}$ ή z^{375} ή $1/z^{375}$ ή z^{376} ή $1/z^{376}$ ή z^{377} ή $1/z^{377}$ ή z^{378} ή $1/z^{378}$ ή z^{379} ή $1/z^{379}$ ή z^{380} ή $1/z^{380}$ ή z^{381} ή $1/z^{381}$ ή z^{382} ή $1/z^{382}$ ή z^{383} ή $1/z^{383}$ ή z^{384} ή $1/z^{384}$ ή z^{385} ή $1/z^{385}$ ή z^{386} ή $1/z^{386}$ ή z^{387} ή $1/z^{387}$ ή z^{388} ή $1/z^{388}$ ή z^{389} ή $1/z^{389}$ ή z^{390} ή $1/z^{390}$ ή z^{391} ή $1/z^{391}$ ή z^{392} ή $1/z^{392}$ ή z^{393} ή $1/z^{393}$ ή z^{394} ή $1/z^{394}$ ή z^{395} ή $1/z^{395}$ ή z^{396} ή $1/z^{396}$ ή z^{397} ή $1/z^{397}$ ή z^{398} ή $1/z^{398}$ ή z^{399} ή $1/z^{399}$ ή z^{400} ή $1/z^{400}$ ή z^{401} ή $1/z^{401}$ ή z^{402} ή $1/z^{402}$ ή z^{403} ή $1/z^{403}$ ή z^{404} ή $1/z^{404}$ ή z^{405} ή $1/z^{405}$ ή z^{406} ή $1/z^{406}$ ή z^{407} ή $1/z^{407}$ ή z^{408} ή $1/z^{408}$ ή z^{409} ή $1/z^{409}$ ή z^{410} ή $1/z^{410}$ ή z^{411} ή $1/z^{411}$ ή z^{412} ή $1/z^{412}$ ή z^{413} ή $1/z^{413}$ ή z^{414} ή $1/z^{414}$ ή z^{415} ή $1/z^{415}$ ή z^{416} ή $1/z^{416}$ ή z^{417} ή $1/z^{417}$ ή z^{418} ή $1/z^{418}$ ή z^{419} ή $1/z^{419}$ ή z^{420} ή $1/z^{420}$ ή z^{421} ή $1/z^{421}$ ή z^{422} ή $1/z^{422}$ ή z^{423} ή $1/z^{423}$ ή z^{424} ή $1/z^{424}$ ή z^{425} ή $1/z^{425}$ ή z^{426} ή $1/z^{426}$ ή z^{427} ή $1/z^{427}$ ή z^{428} ή $1/z^{428}$ ή z^{429} ή $1/z^{429}$ ή z^{430} ή $1/z^{430}$ ή z^{431} ή $1/z^{431}$ ή z^{432} ή $1/z^{432}$ ή z^{433} ή $1/z^{433}$ ή z^{434} ή $1/z^{434}$ ή z^{435} ή $1/z^{435}$ ή z^{436} ή $1/z^{436}$ ή z^{437} ή $1/z^{437}$ ή z^{438} ή $1/z^{438}$ ή z^{439} ή $1/z^{439}$ ή z^{440} ή $1/z^{440}$ ή z^{441} ή $1/z^{441}$ ή z^{442} ή $1/z^{442}$ ή z^{443} ή $1/z^{443}$ ή z^{444} ή $1/z^{444}$ ή z^{445} ή $1/z^{445}$ ή z^{446} ή $1/z^{446}$ ή z^{447} ή $1/z^{447}$ ή z^{448} ή $1/z^{448}$ ή z^{449} ή $1/z^{449}$ ή z^{450} ή $1/z^{450}$ ή z^{451} ή $1/z^{451}$ ή



2) Έστω και $D(0, r) \subsetneq D(0, R)$ ημιεφαλέει ανοικτό. In case
 Ένε τήν τήν τήν τήν $f: D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$
 Ένε \exists τήν $z_1 \in D(0, r), z_2 \in D(0, r)$ where $f(z_1) = f(z_2)$
 εν $z_1 \neq z_2$ ~~Απορ~~ Απορ (για $f \neq 1-1$)

1) Η f είναι 1-1 και f ημ ανοικτή, και $f' \neq 0$.
 Απο $D(0, r)$ ημιεφαλέει ανοικτό η f .
 \exists z_0 εν $D(0, r)$ εν $f'(z_0) \neq 0$

Απο $|f'(z_0)|^2 = \text{bzw.} \neq 0$. Ομοίως, αντιστοίχως
 Απο η είναι εν $D(0, r)$ ημιεφαλέει ανοικτό ~~Απορ~~
 Απο $D(0, r)$ ανοικτός: $\exists U$ ανοικτός, $z_0 \in U$ και V ανοικτός $f(U) \subset V$
 εν $f: U \rightarrow V$ ομοίως $f^{-1}: V \rightarrow U$ ομοίως διασπασίμω. Αν f και f^{-1}
 ομοίως. Ομοίως f ανοικτός $D(0, r)$ ανοικτός $\Rightarrow f(D(0, r))$
 ανοικτός $\Rightarrow f(D(0, r))$ ημιεφαλέει
 ανοικτός διασπασίμω.

Αν α ημιεφαλέει ανοικτός για τήν f

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-\alpha)^n, \quad 0 < |z-\alpha| < r$$

Παρατήρηση: Η $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-\alpha)^n$ συλλογίμω εν $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ και ομοίως
 ημ ανοικτός $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-\alpha)^n$ ομοίως εν $\mathbb{C} - \{\alpha\}$
 Απο η $f = f_1$ εν α ομοίως ανοικτός εν α

Για τήν f_2 :
 Α $W = \frac{1}{z-\alpha}$ ημιεφαλέει εν Taylor ~~ημ~~ συλλογίμω εν α εν
 r και ημ. Απο εν W και W^2 , ομοίως ημ.
~~ημ~~ ημ ομοίως

Πορίμω: Αν 0 τόπος και $z_1, \dots, z_n \in 0$ και
 $f: 0 \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ ομοίως τήν
 ημ εν $h: 0 \rightarrow \mathbb{C}$ ομοίως εν 0 και
 $f_j: 0 \setminus \{z_j\} \rightarrow \mathbb{C}$ ομοίως $j=1, \dots, n$
 where $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + h$

Απορ

ομοίως εν f_j ομοίως εν W παρατήρηση

ημ (19/17)

Terdapat sejumlah n fungsi $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ yang terdefinisi pada di
daerah elips terapan dan ada n titik pada γ .

Evaluasi $\int_{\gamma} f(z) dz$ dengan cara integral C^1 kontinu $\gamma = \{z_1, \dots, z_n\}$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = ;$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f_1(z) dz + \dots + \int_{\gamma} f_n(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\int_{\gamma} f_1(z) dz = C_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i C_{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_1}$$

dan lainnya pada titik f_j .

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ di } 0 \text{ kupa}$$

dan C_{-1} dan nilai $\text{Res}(f, z_1)$ (koordinat titik)

$$\text{Apakah } 2\pi i C_{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \cdot \text{Ind}(\gamma, z_j)$$

$$\left(\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{0 \text{ kupa}}{=} 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \text{Ind}(\gamma, z_j) \right)$$

Definisi: $f: (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ adalah
pada z_i ada poles n terapan di daerah
Terdapat f pada, substitusi $f = \frac{p}{q}$, p, q polinomial, $q \neq 0$

A) z_1 é raiz do denominador, do tipo $z^n + \dots + 1 = 0$

Então: $\sum_{-N_1}^N C_n (z_1 - z_2)^n$ (Resposta para z_1 em N e z_2 em N)

A) z_2 é raiz do denominador, do tipo $z^n + \dots + 1 = 0$

$\sum_{-1}^N C_n z^n$

\mathbb{C} é um domínio de existência, etc...

$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + h$ onde f_i é uma potência

H é o resto da divisão de $f(z)$ por $P(z)$ (onde $P(z)$ é o denominador) e h é o resto da divisão

Assim, resta h é uma potência

Assim: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ onde $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ onde $q(z) \neq 0$

a) $\exists g$ onde $f = e^g$

b) $H \neq 0$ não é uma potência

$\gamma) \text{Ind}(f, \gamma, 0) = 0 \iff \gamma$ não encerra nenhuma das raízes de $q(z)$

PROVA

$\alpha \Rightarrow \beta$: $f = e^g, g$ onde $f' = e^g g' \Rightarrow f' = f g' \Rightarrow \frac{f'}{f} = g'$

$\beta \Rightarrow \alpha$: Assim, se $\frac{f'}{f}$ é uma potência, $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Como $\frac{f'}{f}$ é uma potência:

$\left(\begin{matrix} \gamma(t) = z \\ f(\gamma(t)) = f(z) = W \end{matrix} \right)$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{df}{f} = \text{Ind}(f, \gamma, 0)$

β) ⇒ α) $F' = \frac{f'}{f} \Rightarrow \exists g: f = e^g$

Ψάχνω $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g = F + c$
Ανάλυση ψάχνω c ώστε $e^{F+c} = f \Rightarrow e^c = \frac{f}{e^F}$
 $e^c \cdot e^F$

Taylor $\left(\frac{f}{e^F}\right)' = \frac{f' e^F - (e^F)' f}{e^{2F}} = \frac{f' e^F - e^F \cdot F' f}{e^{2F}} = \frac{f' e^F - e^F \frac{f'}{f} f}{e^{2F}} = 0$

Αρα $\frac{f}{e^F} = \text{σταθερή}$ και α

Πιάνω $\alpha < \gamma$ νικάω.

$\gamma \Rightarrow \beta$) \nwarrow

Άσκηση: 1) Α $\exists g$ ολόκληρο στο 0 ώστε $f = e^g$
τότε $\forall n=1,2, \dots \exists g_n$ ολόκληρο στο 0 τέ
 $(g_n)^n = f$

Απόδειξη
Θένω $g_n = e^{\frac{1}{n} g}$ και $(g_n)^n = e^{n \cdot \frac{1}{n} g} = e^g = f$

2) Αν για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ολόκληροι g_n ώστε
 $(g_n)^n = f$ τότε υπάρχει ολόκληρος g ώστε
 $f = e^g$

$f = (g_n)^n$ για κάποιον n

Αρα $\text{Ind}(f, 0) = \text{Ind}((g_n)^n, 0) = n \cdot \text{Ind}(g_n, 0)$

ο $\text{Ind}(g_n, 0)$ είναι κάποιος αριθμός. Έχω $x = n \cdot k' \neq n$

Αρα $x=0$

Επομένως $\text{Ind}(f, 0) = 0$.

~~Αν f είναι αρνητικό τότε $f = e^g$ είναι αδύνατο γιατί το e^g είναι πάντα θετικό.~~