ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 20/12/07 / Μάθημα 23

<u>Ισχυρισμός</u>: Ω ανοιχτό $\subset \mathbb{C}$. Υπάρχει ακολουθία συμπαγών $K_n \subset \Omega$, $n=1,2,\dots$ ώστε $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

<u>Πόρισμα</u>: Ω τόπος, f ολόμορφη στο Ω, $f \not\equiv 0$. Τότε η f έχει το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος ρίζες στο Ω.

<u>Ισοδύναμη μορφή</u>: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, f ολόμορφη στο Ω. Αν η f έχει υπεραριθμήσιμο το πλήθος ρίζες στο Ω τότε η $f \equiv 0$ στο Ω.

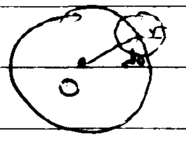
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: I) $\Omega = \mathbb{C}$ τότε $K_n = \{z : |z| \le n\}$

II) $\Omega \neq \mathbb{C}$ οπότε $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$.
Τότε θέτουμε $K_n = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}$ και $|z| \le n\} \subset \Omega$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \Omega$. Αρκεί να δείξω ότι $\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

Πράγματι έστω $z \in \Omega$ τότε $d(z, \Omega^c) > 0$ άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n_0}$ και $|z| \le n_0$.
Τότε $z \in K_{n_0}$ άρα $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Παρατηρήσεις:
1) $K_n \subset K_{n+1}$.
$K_n \subset (K_{n+1})^{\circ} \subset K_{n+1}$
2) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του K_n^c περιέχει τουλάχιστον μία συνεκτική συνιστώσα του Ω^c



Έστω $f : \{z : |z| < 1\} \equiv D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\zeta_0 \in \partial D$ (δηλ. $|\zeta_0| = 1$)
Το ζ_0 λέγεται ομαλό σημείο αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να έχει ολόμορφη επέκταση στο $D \cup \{z : |z - \zeta_0| < r\}$.
Διαφορετικά το ζ_0 λέγεται ανώμαλο σημείο.

<u>Παράδειγμα</u>: $f=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}, \ |z|<1$

Όλα τα z_0 με $|z_0|=1$ και $z_0\neq 1$ είναι ομαλά.
Το $z_0=1$ είναι ανώμαλο.

(Δεν έχει σχέση η ομαλότητα με τη σύγκλιση της σειράς)

π.χ. αν πάρω $z\neq 1$ στην περιφέρεια είναι ομαλό αλλά η σειρά δεν συγκλίνει.

<u>Και αντίστροφα</u>: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n^{2}}$ Αυτή η σειρά συγκλίνει και στο κλειστό μοναδιαίο δίσκο, άρα και για $z=1$.
Όμως τουλάχιστον ένα από τα z_0 με $|z_0|=1$ οφείλει να είναι ανώμαλο διότι $R=1$ (και μάλιστα το $z_0=1$)

(Αν ήταν όλα ομαλά. Θεωρώ όλα τα δισκάκια. Η περιφέρεια σύνολο συμπαγές άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα και άρα θεωρώ την ελάχιστη ακτίνα αυτών.)

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n} = f(z), \ |z|<R$ με ακτίνα σύγκλισης R, $0<R<\infty$. Τότε τουλάχιστον ένα σημείο z_0 με $|z_0|=R$ είναι ανώμαλο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για να δείξουμε ότι το $z_0=1$ ανώμαλο.
Έστω ότι είναι ομαλό. Τότε f ολόμορφη στο $D\cup\{z:|z-1|<r\}$
Τότε και f' ολόμορφη στο $D\cup\{z:|z-1|<r\}$
Όμως $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n^{2}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$

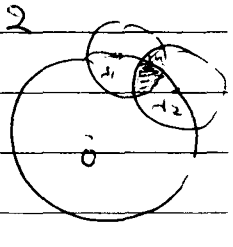
Άρα και $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^{n-1}}{n}\right)\cdot z$ ολόμορφη στο $D\cup\{z: |z-1|<r\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^{n-1}}{n}\right)\cdot z = -\log(1-z)$$

η οποία για $z=1$ $\to\infty$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Θεωρήματος)</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $R=1$.
Για κάθε j με $|j|=1$ υπάρχει $r(j)>0$ ώστε η f επεκτείνεται ολόμορφα στο $D\cup D(j,r(j))$. Αν θεωρήσουμε j_1, j_2 με
$D(j_1,r(j_1))\cap D(j_2,r(j_2))\neq\emptyset$
Έστω F_1 η επέκταση της f στο $D\cup D(j_1,r(j_1))$ και
F_2 η επέκταση της f στο $D\cup D(j_2,r(j_2))$.
Θα δείξουμε ότι στο $D(j_1,r(j_1))\cap D(j_2,r(j_2))$ έχουμε $F_1=F_2$.
Αυτό έπεται από αρχή αναλυτικής συνέχισης διότι
$F_1=f=F_2$ στο $D\cap D(j_1,r(j_1))\cap D(j_2,r(j_2))$.



Άρα υπάρχει ολόμορφη επέκταση F της f στο $D\cup\bigcup_{|j|=1}D(j,r(j))$.
Από συμπάγεια της μοναδιαίας περιφέρειας υπάρχουν
$j_1, j_2,\dots, j_n$ ώστε $\{j: |j|=1\}\subset D(j_1,r(j_1))\cup\dots\cup D(j_n,r(j_n))$

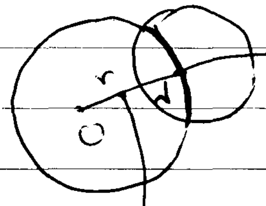
Τότε υπάρχει $\tilde{R}>1$ ώστε $D(0,\tilde{R})\subset D\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}D(j_n,r(j_n))$.
Τότε η F είναι ολόμορφη στο $D(0,\tilde{R})$.
Τότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $\geq\tilde{R}>1$. Άτοπο διότι η ακτίνα σύγκλισης είχε υποτεθεί $R=1$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> $f: D=\{z: |z|<1\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη λέμε ότι έχει φυσιολογικό σύνορο την μοναδιαία περιφέρεια αν κάθε σημείο j, $|j|=1$ είναι ανώμαλο.
Ισοδύναμα, αν η f δεν μπορεί να επεκταθεί ολόμορφα σε κανένα τόπο Ω που περιέχει γνήσια το D.

(ή ισοδύναμα $\forall w$ στον δίσκο η ακτίνα σύγκλισης με κέντρο το w είναι $1-|w|$)

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{(n!)} = z+z^{2}+z^{6}+z^{24}+\dots$$

$R=1$ Έστω ότι επεκτείνεται. Τότε στο σημείο της περιφέρειας θα 'ναι συνεχής



$j=e^{i2\pi\cdot\frac{p}{q}}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\geq 1$, $(p,q)=1$

Θεωρώ την ακτίνα $O\text{-}j$

$0<r<1$

Και θεωρώ τον rj

$$f(rj)\xrightarrow[r\to 1^-]{} f(j)$$

Για $z=rj \Rightarrow r^{n!}\underbrace{e^{i2\pi\frac{p}{q}\cdot n!}}_{=1 \text{ όταν } n>q}$

Οπότε $f(rj)=\sum_{n=1}^{q-1}(rj)^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}$

$\sum_{n=1}^{q-1}(rj)^{n!} \xrightarrow{\text{τείνει}} \sum_{n=1}^{q}(z)^{n!} = A$

$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \xrightarrow[r\to 1]{} \infty$

(και $\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > \sum_{n=q}^{N} r^{n!} \xrightarrow[r\to 1]{} (N-q)$ και για $N\to\infty$ έχουμε ∞)

Άτοπο γιατί το $f(j)$ οφείλε να 'ναι πραγματικός αριθμός (f συνεχής)

Ένα $\alpha\in\mathbb{C}$ λέγεται μεμονωμένη ανωμαλία για τη συνάρτηση f αν υπάρχει $r>0$ ώστε η f να είναι ολόμορφη στο $D(\alpha,0,r)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z-\alpha|<r\}$

Τότε η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent στο $D(\alpha,0,r)$

Δηλαδή $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ για $0<|z-\alpha|<r$.

Παράδειγμα: $\frac{1}{z}$

τα 6.6 μεμονωμένα ανωμαλιών δε
είναι μεμον. ανωμαλίες.

(139)

$\frac{z-1}{z^2-1}$

$\sin w = 0$ α, $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\sin w$ ολόμορφη

$\frac{1}{\sin z}$ $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, $z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

τα $\frac{1}{k\pi}$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες και μάλιστα πραγματικές ανωμαλίες $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sin 1/z} = \infty$

Το 0 (6.6.) όχι μεμονωμένη ανωμαλία δε υπάρχει δίσκος ώστε να 'ναι ολόμορφη.

Είδη μεμονωμένων ανωμαλιών

1) Επουσιώδης: όταν f ολόμορφη σε κάποιο δίσκο $D(\alpha, r)$ με $r>0$, συνεχής ολόμορφη και στο α.

2) Πόλος: όταν $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$ (και φυσική α μεμονωμένη ανωμαλία)

3) Ουσιώδης: Οι περισσότερες

- Η $\frac{\sin z}{z}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $\alpha=0$ και η συνάρτηση είναι ακέραια.
- Η $\frac{1}{z}$ στο $\alpha=0$

Η $\frac{z-1}{z^2-1}$ στο $\alpha=-1$ έχει πόλο. Ενώ στο $\alpha=1$ έχει επουσιώδη ανωμαλία $\left(\frac{z-1}{z^2-1} = \frac{1}{z+1}\right)$

- $f(z) = e^{1/z}$ στο $\alpha = 0$

$\lim_{\substack{z\in\mathbb{R}\\ z\to 0^+}} \frac{1}{e^z} = \infty$, $\lim_{\substack{z\in\mathbb{R}\\ z\to 0^-}} e^{1/z} = 0$,

Δε υπάρχει το όριο άρα δε είναι επουσιώδης ούτε πόλος.

No.
Date

Θεώρημα: α μεμονωμένη ανωμαλία για την f. Τ.Α.Ε.Ι.

1) α επουσιώδης ανωμαλία

3) f φραγμένη σε κάποιο δακτύλιο $D(\alpha, 0, r)$, $r>0$

2) ~~αφ~~ $\exists \lim_{z \to \alpha} f(z) \in \mathbb{C}$

4) $\{n<0 : \alpha_n \neq 0\} = \emptyset$ οπότε έχουμε ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

1) ⇒ 2) Προφανώς συνεχής ως ολόμορφη

2) ⇒ 3) αφού $\exists$ όριο είναι φραγμένη σε κάποιο δακτύλιο.

3) ⇒ 4) Για $0<\rho<r$ από αναπτύγματα Laurent έχω

$$0 \leq |\alpha_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \left(f \text{ φραγμένη στο } D(\alpha, 0, r) \text{ από } M\right)$$

Για $n \leq -1$ και $\rho \to 0$ $\frac{M}{\rho^n} \to 0$

Άρα $\alpha_n = 0$ για $n<0$.

4) ⇒ 1) Προφανές.

Επουσιώδης → όταν επιλέγοντας κατάλληλα το $f(\alpha)$ γίνεται ολόμορφη σ' ένα δίσκο κέντρου α.

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 08/01/08 / Μάθημα 24

ΘΕΩΡΗΜΑ: α μεμονωμένη ανωμαλία για την f (οπότε f ολόμορφη στον $D(\alpha,0,r)$, $r>0$ και σ' αυτόν τον δακτύλιο $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-\alpha)^n$)

Τ.Α.Ε.Ι.:

1) α επουσιώδης ανωμαλία
2) υπάρχει το $\lim_{z\to\alpha} f(z) \in \mathbb{C}$
3) υπάρχει $r'>0$ ώστε f φραγμένη στο $D(\alpha,0,r')$
4) $\{n<0 \text{ ώστε } \alpha_n \neq 0\} = \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$3 \Rightarrow 4$ (β' τρόπος)

Ορίζω:

$$F(z)=\begin{cases}(z-\alpha)^2 f(z), & z\in D(\alpha,0,r)\\ 0, & z=\alpha\end{cases}$$

συνεχής και ολόμορφη στο $D(\alpha,r)$

Προφανώς

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{F(z)-F(\alpha)}{z-\alpha} = \lim \frac{(z-\alpha)^2 f(z)}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = 0$$

Έχουμε $F(\alpha)=0$, $F'(\alpha)=0$

Η $F(z)$ αναλύεται σε δυναμοσειρά ως ολόμορφη

$$F(z)=c_0+c_1(z-\alpha)+c_2(z-\alpha)^2+\dots$$

Και $c_0=c_1=0$ $\quad (F(\alpha)=F'(\alpha)=0)$

Άρα $F(z)=(z-\alpha)^2\left[c_2+c_3(z-\alpha)+\dots\right]$

συγκλίνουσα δυναμοσειρά στον $D(\alpha,r)$

Για $z\neq\alpha$ στον $D(\alpha,r)$:

$$F(z)=(z-\alpha)^2 f(z) = (z-\alpha)^2\left[c_2+c_3(z-\alpha)+\dots\right]$$

Άρα $f(z) \to$ συγκλίνουσα δυναμοσειρά στο $D(\alpha,0,r)$

$= c_2+c_3(z-\alpha)+\dots$

No.

Date

Άσκηση: Έστω g ακέραια συνάρτηση, όχι σταθερά (μη σταθ.). Να βρεθούν οι ακέραιες συναρτήσεις f που ικανοποιούν $|f(z)| \leq |g(z)| \ \forall z \in \mathbb{C}$

Το σύνολο των z ώστε $g(z)=0$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Σε αυτά τα σημεία έχουμε μεμονωμένη ανωμαλία.
Στα σημεία που $g \neq 0$, $\left|\frac{f}{g}\right| \leq 1$ φραγμένη.
Άρα από το Θεώρημα, όλες οι ανωμαλίες είναι επουσιώδεις.
Άρα, $\left|\frac{f}{g}\right| \leq 1$ παντού

Από Liouville, έπεται ότι $\frac{f}{g} = c \Rightarrow f = c \cdot g$, με $|c| \leq 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: α μεμονωμένη ανωμαλία (όπου f ολόμορφη κτλ.)
Τ.Α.Ε.Ι.:
1) α πόλος για την f
2) Υπάρχει $N \geq 1$ φυσικός αριθμός και g ολόμορφη συνάρτηση σε δίσκο με κέντρο α, με $g(\alpha) \neq 0$ ώστε $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^N}$ σε γειτονιά του α (και έξω από το πεδίο ολομορφίας της f)
3) Το σύνολο $\{n<0 : a_n \neq 0\}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο.
4) $f(z) = \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z-\alpha)^n + h(z)$ σε γειτονιά του α με $a_N \neq 0$ και $h(z)$ να έχει επουσιώδη ανωμαλία στο α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$1 \Rightarrow 2$ $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty$ (και f ολόμορφη σε δακτύλιο).

Άρα $f(z) \neq 0$ για $z \in D(\alpha, 0, r')$ για κάποιο $r'>0$.
Θεωρούμε την $1/f$ στον $D(\alpha, 0, r')$, ολόμορφη
και $\lim_{z \to \alpha} 1/f(z) = 0$

Άρα η $1/f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο α και μάλιστα έχει ρίζα το α.

Άτοπο, $1/f(z)$ δεν είναι σταθερά μηδέν.

Έστω ν η πολλαπλότητα της $1/f(z)$ στο α, τότε

$\frac{1}{f(z)} = (z-\alpha)^{\nu} \cdot \varphi(z)$, όπου $\varphi(z)$ ολόμορφη σε γειτονιά του α (και στο α) και $\varphi(z) \neq 0$ σ' αυτή τη γειτονιά.

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^{\nu}} \frac{1}{\varphi(z)}$

Θέτω $g(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$.

__$2 \Rightarrow 3$__ $g(z) = \underset{\neq 0}{c_0} + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \dots$ σε δίσκο με κέντρο το α.

Για $z \neq \alpha$: $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^N} = \underbrace{c_0}_{\alpha_N}(z-\alpha)^{-N} + \underbrace{c_1}_{\alpha_{N+1}}(z-\alpha)^{-N+1} + \dots$

Άρα πράγματι το $\{n<0 : a_n \neq 0\} \neq \emptyset$ και πεπερασμένο.

__$3 \Rightarrow 4$__: Θέτω $N = -\min\{n<0, a_n \neq 0\}$

Από το ανάπτυγμα Laurent, $f(z) = \alpha_{-N}(z-\alpha)^{-N} + \alpha_{-N+1}(z-\alpha)^{-N+1} + \dots + \alpha_{-1}(z-\alpha)^{-1} + \underbrace{[\alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \dots]}_{h(z)}$

__$4 \Rightarrow 1$__

$f(z) = \sum_{n=-N}^{-1} \alpha_n (z-\alpha)^n + h(z)$

h έχει πεπερασμένο όριο (επουσιώδης ανωμαλία)

$\frac{\alpha_{-N}}{(z-\alpha)^N} + \frac{\alpha_{-N+1}}{(z-\alpha)^{N+1}} + \dots + \frac{\alpha_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} = \underset{\downarrow\ \infty}{\frac{1}{(z-\alpha)^N}} \Big[\underset{\downarrow\ \alpha_{-N} \neq 0}{\alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}(z-\alpha) + \dots + \alpha_{-1}(z-\alpha)^{N-1}} \Big]$

Άρα τελικά $\to \infty$

No.
Date

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω α μεμονωμένη ανωμαλία για την f ($f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ στο $D(\alpha, 0, r)$, $r>0$).

Τ.Α.Ε.Ι.:

1) α ουσιώδης ανωμαλία
2) Για κάθε $r' \in (0, r]$ το $f(D(\alpha,0,r'))$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$
3) το σύνολο $\{n<0 : a_n \neq 0\}$ είναι άπειρο

$1 \Leftrightarrow 3$ προφανές

$1 \Rightarrow 2$ Έστω ότι το $f(D(\alpha,0,r'))$ δεν είναι πυκνό.
Τότε θα υπάρχει ανοικτός δίσκος $D(w, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |w-z| < \delta\}$ ώστε $f(D(\alpha,0,r')) \cap D(w,\delta) = \emptyset$.
Άρα, για $z \in D(\alpha, 0, r')$ ισχύει $|f(z) - w| \geq \delta > 0$
Άρα $\frac{1}{f(z)-w}$ ολόμορφη στο $D(\alpha,0,r')$ και $\left|\frac{1}{f(z)-w}\right| \leq \frac{1}{\delta}$

Άρα η $\frac{1}{f(z)-w}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο α, που είναι επουσιώδης.
Άρα, $\lim_{z\to\alpha} \frac{1}{f(z)-w} = c \in \mathbb{C}$.

I) $c=0$, τότε $\lim_{z\to\alpha} (f(z)-w) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to\alpha} (f(z)) = \infty$

$\Rightarrow \alpha$ πόλος, Άτοπο

II) $c\neq 0$, τότε $\lim_{z\to\alpha} (f(z)-w) = \frac{1}{c} \Rightarrow \lim_{z\to\alpha} f(z) = w + 1/c \in \mathbb{C}$

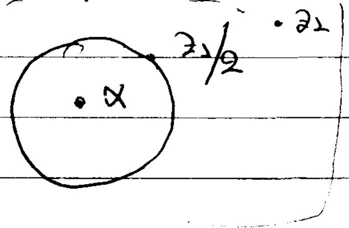
$\Rightarrow \alpha$ επουσιώδης, Άτοπο

(Θεώρημα Casorati-Weierstrass το $1 \Rightarrow 2$)

$2 \Rightarrow 1$ Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $w \in \mathbb{C}$, υπάρχει $z_n \neq \alpha$ με $z_n \to \alpha$ ώστε $f(z_n) \to w$

Θεωρώ $D(w,1)$ ανοιχτό δίσκο

$D(w,1) \cap f(D(\alpha,0,r)) \neq \emptyset$. Άρα $\exists\, z_1 \in D(\alpha,0,r)$ ώστε $|f(z_1)-w|<1$



Άρα $D(w,1/2) \cap f\left(D\left(\alpha,0,\left|\frac{z_1-\alpha}{2}\right|\right)\right) \neq \emptyset$

Άρα $\exists\, z_2$ με $|\alpha - z_2| < \left|\frac{z_1-\alpha}{2}\right|$ ώστε $|f(z_2)-w| < 1/2$

Επαγωγικά, βρίσκω z_n ώστε $0 < |z_n-\alpha| < \frac{|z_{n-1}-\alpha|}{2}$ ώστε $|f(z_n)-w| < \frac{1}{n}$

Όμως $|z_n - w| \to 0$ άρα $z_n \to \alpha$ και $z_n \neq \alpha$.
Και $f(z_n) \to w$