ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 13/12/07 / Μάθημα 21

Άσκηση:

$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ με κέντρο γ, α, β, γ ανά δύο διάφορα

$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} \Rightarrow \frac{1}{z-\beta} = A + \frac{B(z-\alpha)}{z-\beta} \Big|_{z\to\alpha} \quad \frac{1}{\alpha-\beta} = A$

όμοια

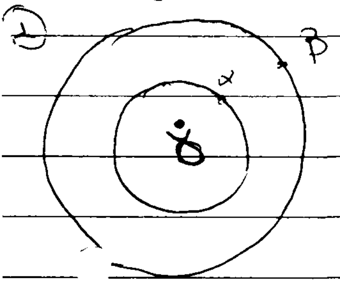
$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{A(z-\beta)}{z-\alpha} + B \Big|_{z\to\beta} \quad \frac{1}{\beta-\alpha} = B$

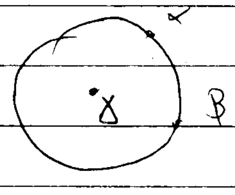
$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{z-\beta}$

1η περίπτωση: $|\alpha-\gamma| < |\beta-\gamma|$ (Οι 1 & 2 παρόμοια)

2η περίπτωση: $|\alpha-\gamma| > |\beta-\gamma|$

3η περίπτωση: $|\alpha-\gamma| = |\beta-\gamma|$





i) $|z-\gamma| < |\alpha-\gamma|$ τι ανάπτυγμα έχει η $\frac{1}{z-\alpha} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-\gamma)^{n+1}}(z-\gamma)^n$

ii) $|z-\gamma| > |\alpha-\gamma|$, $\frac{1}{z-\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\alpha-\gamma)^{-(k+1)} \cdot (z-\gamma)^k$

iii) $|z-\gamma| < |\beta-\gamma|$, $\frac{1}{z-\beta} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta-\gamma)^{n+1}}(z-\gamma)^n$

iv) $|z-\gamma| > |\beta-\gamma|$, $\frac{1}{z-\beta} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\beta-\gamma)^{-(k+1)} (z-\gamma)^k$

– Στην πρώτη περίπτωση:

α) $|z-\gamma| < |\gamma-\alpha|$

α) $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{z-\beta}$ όπου συνδυάζω τα i) και iii)

Δηλ. $f(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-\gamma)^{n+1}}(z-\gamma)^n + \frac{1}{\beta-\alpha}(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta-\gamma)^{n+1}}(z-\gamma)^n =$

$= \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(\alpha-\gamma)^{n+1}} - \frac{1}{(\beta-\gamma)^{n+1}}\right](z-\gamma)^n$

β) $D(\gamma, |\gamma-\alpha|, |\beta-\gamma|)$

↳ συνδυασμός των (ii) και (iii)

$f(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=-\infty}^{-1}(\alpha-\gamma)^{-(k+1)}(z-\gamma)^k + \frac{1}{\beta-\alpha}(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta-\gamma)^{n+1}}(z-\gamma)^n$

γ) $D(\gamma, |\beta-\gamma|, \infty)$

↳ συνδυασμός των (ii) και (iv)

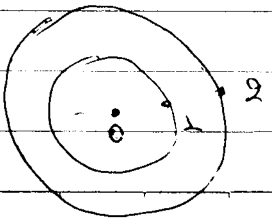
$f(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[(\alpha-\gamma)^{-(k+1)} - (\beta-\gamma)^{-(k+1)}\right](z-\gamma)^k$

Στην τρίτη περίπτωση:

α) $D(\gamma, 0, |\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|) \to$ (i)(iii) (όπως πριν)

β) $D(\gamma, |\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|, \infty) \to$ (ii), (iv) (όπως πριν)

Άσκηση: Να αναλυθεί η $\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$ με κέντρο 0 σε όλους τους δακτυλίους που είναι δυνατό.



$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{\Gamma}{z-2}$

• $\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{A(z-2)}{z-1} + \frac{B(z-2)}{(z-1)^2} + \Gamma \xRightarrow{z\to 2} \boxed{\Gamma = 1}$

• $\frac{1}{z-2} = A(z-1) + B + \frac{\Gamma(z-1)^2}{z-2} \xRightarrow{z\to 1} \boxed{B = -1}$

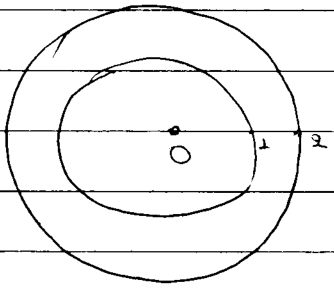
• $\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{(z-1)^2-(z-2)}{(z-1)^2(z-2)} -$

$= \frac{A}{z-1} + \frac{z^2-2z+1-z+2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{z^2-3z+3}{(z-1)^2(z-2)}$

$\frac{A}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} - \frac{z^2-3z+3}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-z^2+3z-2}{(z-1)^2(z-2)} = -\frac{\cancel{(z-1)}\cancel{(z-2)}}{(z-1)^{\cancel{2}}\cancel{(z-2)}} = \frac{-1}{z-1}$

$\Rightarrow \boxed{A=-1}$

Επομένως $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{z-2}$



• $|z|<1$: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$

$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

$\boxed{\text{Στην } |z|<1:}$

• $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$

• $1<|z|<2$

$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k$

$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = -\sum_{\lambda=-\infty}^{-2} (\lambda+1) z^\lambda$

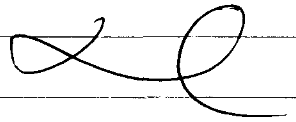
$f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} (\lambda+1) z^\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \sum_{k=-\infty}^{-2} k z^k - \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

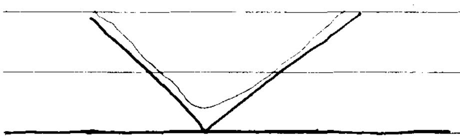
$|z|>2$, $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}$

$z-(n+1)=k \Rightarrow n=-(k+1)$ άρα $= \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{-(k+1)} z^k$

$$f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=-\infty}^{-2}(k+1)z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{-(k+1)} z^k =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2}\left[k + 2^{-(k+1)}\right] z^k$$





$f(x) = |x|$

Υπερβολές y_n που προσεγγίζουν την f είναι παντού παραγωγίσιμες. $y_n \to f$ αλλά f όχι παραγωγίσιμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό. $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $n=1,2,\dots$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω. Τότε f ολόμορφη στο Ω και $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

f συνεχής. Έστω $z_0 \in \Omega$ και δίσκος (συμπαγής) $\overline{B}(z_0,\varepsilon)$. Εκεί η f είναι ομοιόμορφο όριο συνεχών και άρα είναι συνεχής.

Από Θεώρημα Morera αρκεί να αποδείξω ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο που με το εσωτερικό του περιέχεται στο Ω.

$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$ γιατί f_n ολόμορφες

Όμως $\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz \to \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ γιατί στο τρίγωνο που είναι συμπαγές έχω ομοιόμορφη σύγκλιση (άρα και τα ολοκληρώματα συγκλίνουν)

Έστω $X \subseteq \Omega$ συμπαγές.
Ισχυρίζομαι ότι το X μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος κλειστών δίσκων που περιέχονται στο Ω.

Έστω $z \in X \subset \Omega$. $\exists\, r(z) > 0$ ώστε $D(z, r(z)) \subseteq \Omega$.
Τότε $z \in D(r, \frac{r(z)}{2}) \subset \overline{D(r, \frac{r(z)}{2})} \subseteq \Omega$

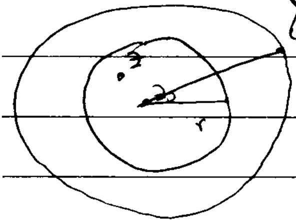
$D(z, \frac{r(z)}{2})$ $z \in X$ ανοιχτό κάλυμμα άρα $\exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα.

$$X \subset D(z_1, \tfrac{r(z_1)}{2}) \cup \dots \cup D(z_k, \tfrac{r(z_k)}{2}).$$

Άρα και

$$X \subseteq \overline{D(z_1, \tfrac{r(z_1)}{2})} \cup \dots \cup \overline{D(z_k, \tfrac{r(z_k)}{2})}.$$

Άρα αρκεί να δείξω $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D} \subseteq \Omega$,



$\gamma : |\zeta - z_0| = R$
$R > r$
και
$\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$

~~Θέλω να το δείξω για το δίσκο $\overline{D}(z_0, r)$. Θεωρώ $\gamma : |\zeta - z_0| = R$ με $R > r$. $D(z_0, R)$ ανοιχτό κυρτό ισχύει ο τύπος Cauchy,~~ [illegible]

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}\, f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta$$

Άρα $f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta$

και $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta$

Για $z \in D(z_0, R)$

$$\left| f_n'(z) - f'(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{1}{(R - r)^2} \sup_{|\zeta - z_0| = R} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \to 0$$

(ομοιόμορφη στο $|\zeta - z_0| = R$ είναι συμπαγές)

Παρατηρήσεις: 1) Ω ανοιχτό είναι σημαντικό! ←

Πχ. σε σύνορα δεν ισχύει

Πχ. καλά στην $\overline{D}(0,1)$? όχι στην περιφέρεια [illegible]

2) Μπορεί $f_n \to f$ ομοιόμορφα σ' όλο το Ω αλλά f_n' δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σ' όλο το Ω στην f'.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Η ακολουθία $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^2}$ συγκλίνει προς κάποια f ομοιόμορφα και στον $\{z : |z| \le 1\}$ και στον $\{z : |z| < 1\}$.

$$f_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{k} z^{k-1}}{k^{\cancel{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

$$z \cdot f_n'(z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^n}{n} + \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

→ Εδώ για $z = 1$ δεν συγκλίνει

Αν υποθέσω ότι συγκλίνει ομοιόμορφα η $f_n'(z)$ σ' όλο τον μοναδιαίο.

Έχω
$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \le \sup_{|z| \le 1} \left| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} \right| = \sup_{|z| < 1} \left| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ συγκλίνει

ΑΤΟΠΟ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 18/12/07 / Μάθημα 22

Αν δύο ολόμορφες συναρτήσεις ταυτίζονται σε άπειρο το πλήθος σημεία, ταυτίζονται τελικά;;

Δηλ., αν f, g ολόμορφες στο Ω και $f(z)=g(z)$ για άπειρα σημεία στο Ω, είναι σωστό ότι $f \equiv g$ στο Ω;

Απάντηση: Όχι κατ' ανάγκη

Παράδειγμα: $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $f(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv e^{1/z}$

Έχουμε $1 \not\equiv e^{1/z}$

Όμως $1 = e^0$, αν $1 = e^{1/z} = e^0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 2\kappa\pi i \Leftrightarrow$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2\kappa\pi i}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Αυτά τα σημεία είναι άπειρα και έχουν ένα μοναδικό σημείο συσσώρευσης το 0, το οποίο δεν ανήκει στο Ω, αλλά στο σύνορο του Ω.

ΑΡΧΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΙΣΗΣ ή ΤΑΥΤΙΣΜΟΥ:

Ω τόπος, f, g ολόμορφες στο Ω και $w \in \Omega$ και $z_\kappa \in \Omega$ ανά δύο διάφορων σημείων ώστε $z_\kappa \to w$ και $f(z_\kappa) = g(z_\kappa)$ $\forall \kappa$.
Τότε $f \equiv g$ στο Ω.

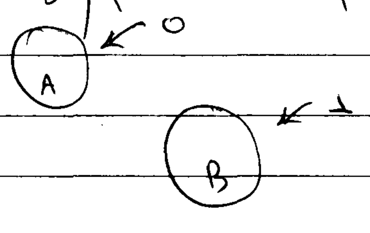
Ισοδύναμη μορφή: Αν Ω τόπος, F ολόμορφη στο Ω και το σύνολο ριζών $Z(F) = \{z \in \Omega : F(z) = 0\}$ έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε $F \equiv 0$.

Ισοδύναμη μορφή: Αν Ω τόπος και F ολόμορφη στο Ω όχι ταυτοτικά μηδέν τότε οι ρίζες της F είναι μεμονωμένες, δηλαδή, αν z_0 στο Ω με $F(z_0) = 0$ τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε στο $\{z \in \Omega : |z - z_0| < r\}$ η μοναδική ρίζα της F είναι το z_0.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Η συνεκτικότητα είναι απαραίτητη προϋπόθεση

π.χ. αν $\Omega = A \cup B$



Τότε $f(z) = 0$ $\forall z \in A$. Υπάρχουν σσ στο εσωτερικό του Ω αλλά $f \not\equiv 0$

και $f(z) = 1$ $\forall z \in B$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

1) Να δειχθεί ότι $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Εδώ $\Omega = \mathbb{C}$.

Ξέρουμε ότι η $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ \forall z \in \mathbb{R}$.

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι και κάθε πραγματικός αριθμός είναι σ.σ.σ.

Από αρχή αναλυτικής συνέχισης έπεται το ζητούμενο.

2) $\cos(z-w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w \ \forall z, w \in \mathbb{C}$

Αν $w \in \mathbb{R}$ σταθερός, ως προς z το πρώτο μέλος είναι ακέραια συνάρτηση και το δεύτερο μέλος επίσης ακέραια συνάρτηση.

Αρκεί να βρω άπειρο σύνολο με σ.σ. μέσα στο $\mathbb{C}$ ώστε να συμπίπτουν τα δύο μέλη. Αρκεί ότι η σχέση ισχύει $\forall z \in \mathbb{R}$.

Άρα από αρχή αναλυτικής συνέχισης η σχέση ισχύει και $\forall z \in \mathbb{C}$.

Δείξαμε ότι $\forall w \in \mathbb{R}$ και $\forall z \in \mathbb{C}$ η σχέση ισχύει.

Τώρα θα σταθεροποιήσουμε το z εν $\mathbb{C}$.

Τότε τα δύο μέλη είναι ως προς w ακέραιες συναρτήσεις.

$\forall w \in \mathbb{R}$ ξέρω ότι ισχύει η σχέση, άρα από αρχή αναλυτικής συνέχισης ισχύει $\forall w \in \mathbb{C}$.

3) Να βρεθούν αν υπάρχουν οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε $f(1/n) = \frac{1}{n} \ \forall n = 1, 2, \dots$

Προφανώς η $f(z) = z$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θέτω $g(z) = z$. Θα δείξω ότι $f = g$

Έχω $f(z) = g(z)$ για $z = 1/n$ που έχουν σ.σ. το $0 \in \mathbb{C}$

Από Α.Α.Σ. $f = g$

4) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ακέραια

($f(\frac{1}{n}) = n \cdot \sin \frac{1}{n}$

Άσκηση: Να βρεθούν αν υπάρχουν οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε $f(\frac{1}{n}) = n \cdot \sin \frac{1}{n} \ \forall n = 1, 2, \dots$

Όμως πριν προκύψει η μοναδικότητα αφού $1/n \to 0 \in \mathbb{C}$

$0 \in \mathbb{C}$ και η $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ είναι ακέραια στο $\mathbb{C}$ ← το z απλοποιείται καθώς $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots$

5) Να βρεθούν αν υπάρχουν οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{αν } n \text{ μονός}\\ \frac{1}{n^2} & \text{αν } n \text{ ζυγός}\end{cases}$$

~~Έστω ...~~

Για n μονός → η $f(z)=z$ ικανοποιεί την συνθήκη

άρα αν υπάρχει τέτοια f ~~θα~~ ταυτίζεται με την $f(z)=z$

καθώς $1/n \to 0 \in \mathbb{C}$. Τότε όμως $f(1/n) \neq 1/n^2$

Άρα ~~δεν~~ δεν ισχύει.

Η άσκηση λύνεται και με τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου.

$f(0)=0$ καθώς f ακέραια $\exists\, f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$

ΑΡΑ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \text{μονός}}}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{0}}{\frac{1}{n}}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \text{ζυγός}}}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ 1 & \neq & 0 \end{array}$$

Άρα η μιγαδική παράγωγος δεν ~~υπάρχει~~ θα μπορούσε να υπάρχει.

$\alpha\ell$

$\underline{O}$ τόπος F ολόμορφη στο $\underline{O}$ όχι εκ ταυτότητος O και $z_0 \in O$

με $F(z_0)=0$.

Τότε $\exists\ r>0$ ώστε το z_0 να είναι η μοναδική ρίζα της f στο

$\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση

$g: O \to \mathbb{C}$ με $g(z_0)\neq 0$ ώστε $F(z)=(z-z_0)^p g(z)$ $\forall z \in O$

g συνεχής στο z_0, $g(z_0)\neq 0$ άρα $\exists\ r>0$ ώστε $g(z)\neq 0$

$\forall z$ με $|z-z_0|<r$.

$\exists\, w \in \underline{O}$ $F^{(n)}(w)=0$ $\forall n=0,1,2,\dots$ $(\Longleftrightarrow)$ $\exists\ r>0$ ώστε

$F\equiv 0$ στο $\{z: |z-w|<r\}$

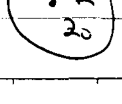
Προφανώς αυτό προκύπτει απ' την ανάπτυξη της F με δυναμοσειρά στο δισκάκι (οι συντελεστές δίνονται απ' τις παραγώγους)
(το αντίστροφο προφανές)

Έχω τώρα τα σύνολα:
$A=\{w\in\Omega : F^{(n)}(w)=0 \ \forall\, n=0,1,2\}$ και $\{w\in\Omega : \exists\, r>0$ ώστε $F\equiv 0$ στο $\{z : |z-w|<r\}\}$
τα οποία είναι ίσα (από την προηγ. παρατήρηση)

Το δεύτερο σύνολο είναι ανοιχτό
Το πρώτο σύνολο είναι $\bigcap_{n=0}^{\infty}\left(F^{(n)}\right)^{-1}(\{0\})$ άρα κλειστό στο Ω
Και είμαστε σε συνεκτικό χώρο
Άρα $A=\emptyset$ ή $A=\Omega$
Αν $A=\Omega \Rightarrow F\equiv 0$ στο Ω άτοπο απ' την υπόθεση.
Άρα $A=\emptyset$

Θεωρούμε το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}$ ώστε $F^{(n)}(z_0)\neq 0\}\neq\emptyset$
και θέτουμε $p=\min\{n\in\mathbb{N} : F^{(n)}(z_0)\neq 0\}\geq 1$ (αφού $F(z_0)=0$)

Υπάρχει $R>0$ ώστε στον $\{z : |z-z_0|<R\}$ ισχύει
$$F(z)=\underset{\neq 0}{\alpha_p}(z-z_0)^p+\alpha_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+\dots=$$
$$=(z-z_0)^p\underbrace{\left[\alpha_p+\alpha_{p+1}(z-z_0)+\dots\right]}_{\text{συγκλίνουσα δυναμοσειρά}}$$
στο δίσκο αυτή η δυναμοσειρά είναι μια ολόμορφη $g(z)$ και $g(z_0)=\alpha_p\neq 0$

Μένει να επεκτείνω την g σ' όλο το Ω.
Έχω $g(z)$ στο $|z-z_0|<R$

Στο $\Omega\setminus\{z_0\}$ θεωρώ $\dfrac{F(z)}{(z-z_0)^p}$

Έχω επομένως $\left.\begin{array}{ll} \varphi(z), & \text{στο } |z-z_0|<R \\ \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^\rho}, & \Omega\setminus\{z_0\} \end{array}\right.$

Στο $|z-z_0|<R \setminus \{z_0\}$ ταυτίζονται οι δύο ορισμοί, άρα έχω ορίσει τελικά στο Ω την φ ολόμορφη.

<u>Παρατήρηση</u>: Το ρ και η φ είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Το ρ ονομάζεται πολλαπλότητα της ρίζας z_0.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω ότι $f(z)=(z-z_0)^\rho\varphi(z)$, $\rho\geq 1$, φ ολόμορφη στο Ω, $\varphi(z_0)\neq 0$

και $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\omega(z)$, $m\geq 1$, ω ολόμορφη στο Ω, $\omega(z_0)\neq 0$

Έστω ότι $\rho>m$ τότε $\omega(z)=\varphi(z)\cdot(z-z_0)^{\rho-m}$

τότε $\omega(z_0)=0$ <u>Άτοπο</u>

Όμοια αν $\rho<m$ ...

Άρα <u>$\rho=m$</u>

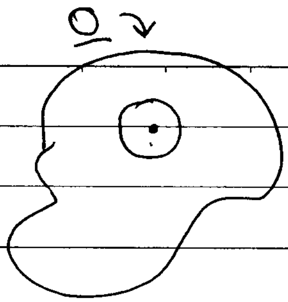
Και $f(z)=(z-z_0)^\rho\cdot\varphi(z)=(z-z_0)^\rho\,\omega(z)$

Για $z\neq z_0$ έχω $\varphi(z)=\omega(z)$ καθώς φ, ω συνεχείς με τη μοναδικότητα του ορίου δείχνω και ότι $\varphi(z_0)=\omega(z_0)$

(Αν $f(z_0)\neq 0$ για την ~~πολλαπλότητα~~ θεωρώ $f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^\rho\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$.)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Ω τόπος, τότε ο δακτύλιος $H(\Omega)=\{f: f:\Omega\to\mathbb{C} \text{ ολόμορφη}\}, +, \cdot$ δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.

Δηλ. αν f,g ολόμορφες στο Ω και $f\cdot g\equiv 0$ τότε ή $f\equiv 0$ ή $g\equiv 0$ στο Ω



Υπάρχει ~~[illegible]~~ δίσκος D ώστε $\overline{D} \subseteq \Omega$.
$\overline{D} \subseteq Z(f\cdot g)$ (στο σύνολο ριζών του γινομένου)
$Z(fg) = \{ Z(f) \cup Z(g) \}$

Το $\overline{D}$ περιέχει άπειρα σημεία, άρα ή το $\overline{D}\cap Z(f)$ ή το $\overline{D}\cap Z(g)$ είναι άπειρο

$\overline{D}$ συμπαγές άρα $\exists$ σ.σ. Από Α.Α.Σ έπεται ή ότι $f \equiv 0$ ή ότι $g \equiv 0$ στο Ω

(τομή άπειρη, $\overline{D}$ συμπαγές άρα οι ρίζες έχουν σ.σ στο εσωτ. του $\overline{D}$, άρα στο εσωτ. του Ω και άρα ισχύει Α.Α.Σ)