Μάθημα 19 — 06/12/07

(10)

Μιγαδική Ανάλυση:

1) Έστω $z_0 \neq 0$. Να αναπτυχθεί κατά Taylor (σε δυναμοσειρά) με κέντρο z_0 καθε ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου σε γειτονιά του z_0.
Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης.

Λύση: Οι log διαφέρουν κατά $2k\pi i$, άρα τα αναπτύγματα θα είναι τα ίδια, εκτός από τους σταθ. όρους, που διαφ. κατά $2k\pi i$.

Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = |z_0|$.

2) Να αναπτυχθεί η $\log(1+z)$ κατά Taylor, με κέντρο $z_0 = 0$.

3) " " " $\log(1-z)$ " " $z_0 = 0$.

2) $1+z \neq 0 \Rightarrow z \neq -1$

$D = \{z : |z| < 1\}$

3) $D = \{z : |z| < 1\}$.

αναπτύσσεται με δυν. σειρ. D.

2) $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

SKAG

$$\left(\log(1+z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} z^m$$

$$\|$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m.$$

Άρα, από μοναδ. αναπτύγματος Taylor:

$$(m+1) a_{m+1} = (-1)^m \Rightarrow a_{m+1} = \frac{(-1)^m}{m+1}, \ m \geq 0$$

$$\rightarrow a_n = -\frac{(-1)^n}{n}, \ n \geq 1.$$

Άρα, $\log(1+z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n} z^n =$

$$\|$$

$$\log 1 = 2k\pi i.$$

$$= 2k\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n.$$

3) $\log(1-z) = 2k\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$

→ Σειρά Laurent με κέντρο $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται κάθε τυπική σειρά (δε μας νοιάζει αν συγκλίνει) της μορφής $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, με $a_n \in \mathbb{C}$.

Μια τέτοια σειρά λέμε ότι συγκλίνει στο $w \neq z_0$ αν και μόνον αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (w-z_0)^{-n}$ συγκλίνουν.

Και όταν αυτό συμβαίνει, το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-z_0)^n$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των ορίων $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (w-z_0)^n$ και $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{-n} (w-z_0)^{-n}$.

Σε ένα σύνολο K λέμε ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση αν στο K συγκλίνουν ομοιόμορφα και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n}$.

(Ο γενικά, δεν ορίζεται στο $z=z_0$ η 2η σειρά, άρα η σειρά Laurent δε συγκλίνει για $z=z_0$.)

αν συγκλίνει η

Η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ συγκλίνει για $|z-z_0|<R$, για κάποιο $R \geq 0$, και στα σημεία της περιφέρειας εξαρτάται.

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \overset{\frac{1}{z-z_0}=w}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, δυναμοσειρά, που συγκλίνει για $|w| < \tilde{R}$ και ίσως σε σημεία της περιφέρειας →

συγκλίνει

(2)

$\rightarrow \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \tilde{R} \rightarrow |z-z_0| > \frac{1}{\tilde{R}} = r$

(δηλ. η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ συγκλίνει για

$|z-z_0| > \frac{1}{\tilde{R}}$ (εξωτερικό του δίσκου με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\frac{1}{\tilde{R}}$),

$\frac{1}{\tilde{R}} = r$

και ίσως σε σημεία της περιφέρειας.

Συγκλίνει και για $z=\infty$.

Ωστε η σειρά Laurent συγκλίνει στην τομή των 2 συνόλων.

I) $R<r$ → η τομή των 2 συνόλων είναι το $\emptyset$ ⇒ δε συγκλίνει η σειρά Laurent.

II) $R=r$

III) $R>r$

→ Έχω σύγκλιση σε κάποιο υποσύνολο της περιφέρειας $|z-z_0| = r = R$ (που σίγουρα έχει κενό εσωτερικό), άρα δεν μπορώ να μιλήσω για ολομορφία / ανάλυση

→ Έχω σύγκλιση στον δακτύλιο $D(0,r,R)$, και ίσως σε κάποια σημεία της περιφέρειας.

Επεί που έχω σύγκλιση στο I, II, στα ανοικτά σύνολα έχω ολομορφία, και η παράγωγος της σειράς είναι η σειρά των παραγώγων.

Σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0,r,R)$ έχω ομοιόμορφη σύγκλιση, καθώς και απόλυτη σύγκλιση.

Στον $D(0,r,R)$ η σειρά είναι ολόμορφη.

Η παράγ. της δυναμοσειράς είναι η σειρά των παραγώγων.

Και: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n\right) \circ g$, όπου

$g(z) = w = \frac{1}{z-z_0}$

Άρα: η παράγωγος της δυνσειράς είναι η παράγωγος της σύνθεσης, δηλ. η

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n\right)' \circ g \cdot g' =$

$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n} w^n)' \circ g\right] g' =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_{-n} w^n)' \circ g \cdot g'\right] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{-n} (z-z_0)^{-n}\right]'$, δηλ. η παράγωγος της Σης σειράς είναι το άθροισμα των παραγώγων.

Άρα, $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[a_n (z-z_0)^n\right]'$.

↓ η περιοχή σύγκλισης δεν αλλάζει

Σ.Δ.Ο. σε κάθε ανοικτό δακτύλιο, αν f ολόμορφη εκεί, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Laurent (συγκλίνουσα), με κέντρο το κέντρο του δακτυλίου.

Θεώρημα: Έστω ανοικτός δακτύλιος

$D(z_0,r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r<|z-z_0|<R\}$, $z_0\in\mathbb{C}$, $0\le r<R\le+\infty$

Έστω $f: D(z_0,r,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

Τότε, υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $a_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$, ώστε $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, για κάθε $z\in D(z_0,r,R)$. Ακόμη, οι a_n είναι μοναδικοί και δίνονται από τον τύπο

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,$$ όπου δ οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κέντρου z_0, που περιέχεται στο $D(z_0,r,R)$.

ομοιόμ. σύγκλιση.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(\zeta-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta=$$

$\frac{1}{\zeta}$ φραγμένο

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(\zeta-z_0)^{n-k-1}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot a_n\int_\delta(\zeta-z_0)^{n-k-1}\,d\zeta$$

έχει παράγουσα για $n\neq k$, άρα $=0$ για $n\neq k$.

Για $n=k$:

$$\underset{n=k}{=}\frac{a_k}{2\pi i}\cdot\int_\delta\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}=a_k$$

δείκτης στροφής, $=1$ για θετικά προσανατ/λ.

Άρα, ισχύει η μοναδικότητα.

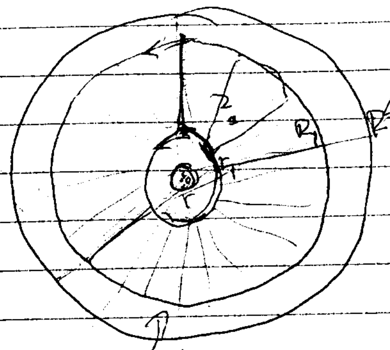
Αν 2 δακτύλιοι με το ίδιο κέντρο τέμνονται, τότε, αν f ολόμορφη στην ένωση των δακτυλίων, τα αναπτύγματα Laurent συμπίπτουν, καθώς υπάρχει περιφέρεια δ που περιέχεται και στους 2 δακτυλίους.

Λήμμα: $f: D(z_0,r,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, $0\le r<R\le+\infty$

Για $r<r_1<|z-z_0|<R_1<R$,

ισχύει: $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

(114)



οι γραφές δα περιφέρονται ερώτημα.

+ Βιβλίο σελ. 465-466

κυρτά κομμάτια G_i, ένα μόνο περιέχει το z, έστω το G_0.

Άρα: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{G_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + \sum_{i\neq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{G_i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \to 0 =$$

0, αφού $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ ορίζεται στα κυρτά $G_i, i\neq 0$ και είναι ολόμορφη.

$$= f(z)\cdot \underbrace{Ind_{G_0}(z)}_{=1} = f(z)$$

Έτσι, απέδειξα το 2ο μέρος του Θεωρήματος.

Θεωρ. Απόδειξη. $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} =$$

$|\cdot|<1$

SKAG

→ Φραγμένο σε περιοχή (II) → ομοιόμορφη σύγκλιση (είμαστε μέσα σε συμπαγές το δίσκο)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right]}_{a_n,\ \text{για } n=0,1,2,\dots}(z-z_0)^n$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}-1}d\zeta =$$

$|\cdot|<1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta =$$

$|\cdot|<1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

ομ. σύγκλιση, φραγμένη $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}f(\zeta)\cdot(\zeta-z_0)^n\left(\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^n d\zeta\right)(z-z_0)^{-n-1} =$$

SKAG

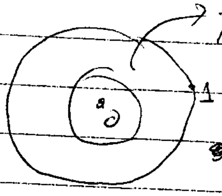
$= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z-z_0)^m$, όπου

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\, d\zeta .$$

→ Δε σημαίνει ότι αν η f είναι ολόμ. σε 2 μη τεμνόμενους δακτυλίους, τα αναπτύγματα Laurent είναι ίδια.

π.χ. $\frac{1}{1-z}$, $z_0 = 0$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$



Έξω από το δίσκο,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} z^m =$$

$= -\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)$, δηλ. το ανάπτυγμα Laurent είναι διαφορετικό.

SKAG

$\mathcal{D}(z_0, r, R)$

→ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$, όπου $r<\rho<R$

$\boxed{\text{Για } M_\rho = \max_{|\zeta-z_0|=\rho} |f(\zeta)|,\ r<\rho<R, \text{ τότε } |a_n| \le \frac{M_\rho}{\rho^n},\ n\in\mathbb{Z}}$:

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right| =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\underbrace{(\text{μήκος καμπύλης})}_{\cancel{2\pi}\rho}\cdot\frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} =$$

$$= \frac{M_\rho}{\rho^n} .$$

→ Φραγμένη και ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι σταθερή!

→ Άσκηση: Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν όλες οι ολόμορφες συναρτήσεις $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, που ικανοποιούν: $|f(z)|\le |z|^{\lambda}$, $\forall z\neq 0$.

SKAG

Μιγαδική | 11/12/07 | Μάθημα 20

$f: D(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

Τότε η f γράφεται $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_n)^n$ στο $D(z_0, r, R)$

Αλλά $\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, $r < \rho, R$

Πόρισμα: Για $\rho \in (r, R)$ θέτουμε $M_\rho = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|$.
Τότε $|\alpha_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$|\alpha_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{M_\rho}{\rho^n}$

Άσκηση: $f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $|f(z)| \leq |z|^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Να βρεθεί η f.

ΛΥΣΗ

$\mathbb{C} - \{0\} = D(0, \underset{r}{0}, \underset{R}{\infty})$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n$

$M_\rho = \sup_{|\zeta| = \rho} |f(\zeta)| \leq \rho^\lambda$

Αν $n \in \mathbb{Z}$, $|\alpha_n| \leq \rho^{\lambda - n}$ $\forall \rho \in (0, +\infty)$

- $\lambda - n > 0$ $(n < \lambda)$ τότε $|\alpha_n| \leq \rho^{\lambda - n} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$
- $\lambda - n < 0$ $(n > \lambda)$ τότε $0 \leq |\alpha_n| \leq \rho^{\lambda - n} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0$

• Αν $\lambda \notin \mathbb{Z}$ τότε $f(z) = 0$

Αν $\lambda \in \mathbb{Z}$ υπάρχει η περίπτωση $\lambda = n$
Τότε $f(z) = c \cdot z^\lambda$ με $|c| \leq 1$ (εδώ $c = \alpha_\lambda$)

$\Downarrow$

$|\alpha_n| \leq 1$

Άσκηση $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και ας υποθέσω ότι

$$|f(z)| \le |z|^{\lambda} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \ge 500$$

με $\lambda = 7 + \frac{1}{2}$.

Τι μπορούμε να πούμε για την f;

(Θα είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 7).

ΛΥΣΗ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$|a_n| \le \frac{M_\rho}{\rho^n}, \quad M_\rho = \max_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)|$$

$$|a_n| \le \frac{\rho^{7+1/2}}{\rho^n} = \rho^{7+1/2-n} \quad \forall\, \rho \ge 500$$

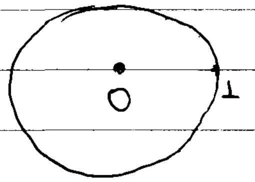
- $n \ge 8$, $|a_n| = 0$ $(\rho \to \infty)$
- $n < 8$, $|a_n| \le 500^{7+1/2-n}$

Άρα $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_7 z^7$

Άσκηση $\frac{1}{1-z}$ την έχω αναπτύξει με κέντρο 0

$|z| < 1$

$|z| > 1$



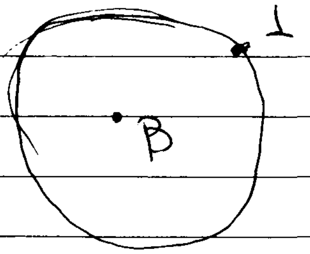
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right)$$

$\frac{1}{1-z}$ με κέντρο β

I) $\beta = 1$ $\quad D(1,0,\infty) = \mathbb{C}\setminus\{1\}$

Η $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-1)^n$ όπου $\alpha_n = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ -1, & n = -1 \end{cases}$



$D(\beta, 0, |1-\beta|)$

$D(\beta, |1-\beta|, +\infty)$

• Μέσα στο δίσκο:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-\beta)-(z-\beta)} = \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-\beta}{1-\beta}\right)} = \frac{1}{1-\beta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\beta)^n}{(1-\beta)^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta)^{n+1}} (z-\beta)^n$$

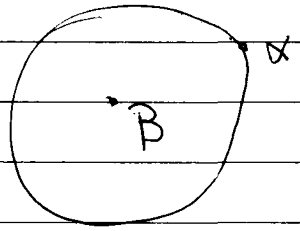
• Στον δακτύλιο $|z| > 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-\beta)-(z-\beta)} = \frac{1}{z-\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1-\beta}{z-\beta} - 1} = \frac{1}{z-\beta} \cdot \frac{-1}{1-\frac{1-\beta}{z-\beta}} = \frac{-1}{z-\beta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)^n}{(z-\beta)^n} =$$

$$= -\sum_{m=-\infty}^{-1} (1-\beta)^{-m-1} \cdot (z-\beta)^m$$

$\begin{pmatrix} n+1 = -m \\ n = -m-1 \end{pmatrix}$

<u>Άσκηση</u>: $\frac{1}{\alpha - z}$ με κέντρο β



<u>ΟΜΟΙΩΣ</u>

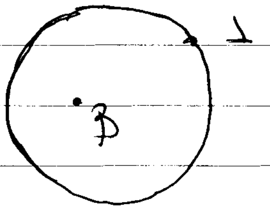
Ερώτημα $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ με κέντρο το β πώς θα την αναπτύξω;

• Αν $\beta = 1$

Είναι ήδη αναπτυγμένη $a_n = \begin{cases} 0, & n \neq -2 \\ 1, & n = -2 \end{cases}$

- Αν $\beta \neq 1$

Χωρίς το τετράγωνο έχουμε βρει τα 2 αναπτύγματα



$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \qquad (m+n=k)$$

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} z^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (k+1)$$

Αλλιώς $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \overset{n-1=k}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$$

Στον άλλο δακτύλιο: $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}\right)' =$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z^n}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (z^{-n})' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{-n-1}$$

Αν έχω $\left(\frac{1}{a-z}\right)^3$: $\left(\frac{1}{a-z}\right)' = \frac{1}{(a-z)^2}$ και $\left(\frac{1}{a-z}\right)'' = 2(a-z)^{-3} = \frac{2}{(a-z)^3}$

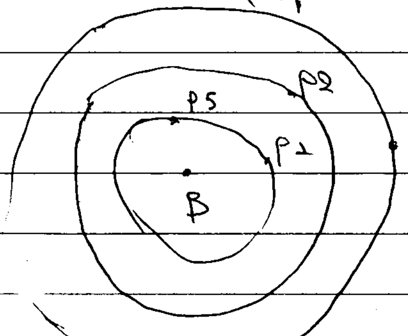
Οπότε $\left(\frac{1}{a-z}\right)^3 = 2\left(\frac{1}{a-z}\right)''$

κ.ο.κ. για τις άλλες δυνάμεις

Γενικά, $\left(\frac{1}{\alpha-z}\right)^{\nu} = \text{σταθ}\cdot\left(\frac{1}{\alpha-z}\right)^{(\nu-1)}$

• Αν $\frac{P}{Q}$ με κέντρο β (με $\deg P < \deg Q$, αλλιώς κάνω διαίρεση και το πηλίκο αναπτύσσεται σωστά)

↳ κοιτάω ρίζες του παρονομαστή Q



Σε κάθε δακτύλιο θα έχω διαφορετικό ανάπτυγμα. Πώς θα το βρίσκω;

Αναλύω το κλάσμα. Ανάλογα με την πολλαπλότητα των ριζών έχω πχ.

$\frac{A_{11}}{z-\rho_1}+\frac{A_{12}}{(z-\rho_1)^2}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(z-\rho_1)^{k_1}}$, αν πολλαπλότητα της ρ_1 είναι k_1

ομοίως $\frac{A_{21}}{z-\rho_2}+\frac{A_{22}}{(z-\rho_2)^2}+\dots+\frac{A_{2k_2}}{(z-\rho_2)^{k_2}}$, πολ. της ρ_2 είναι k_2.

κ.ο.κ. για όλες τις ρίζες.

Τότε $\frac{P}{Q}$ = άθροισμα όλων αυτών

Κάθε ένα από τα κλάσματα ξέρουμε να το αναπτύξουμε. Θα πρέπει να τα ενώσω ώστε σε κάθε δακτύλιο όταν επιμέρους προσθέτω να επιλέγω το κατάλληλο ανάπτυγμα ανάλογα με το πού βρίσκεται η ρίζα σε σχέση με τον δακτύλιο.

Άσκηση: $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ → να αναπτυχθεί αν $\beta\neq\alpha$ και $\alpha,\beta\neq 0$.
Να αναπτυχθεί σε όλους τους δακτυλίους με κέντρο το 0.
Να βρεθεί και το ανάπτυγμα της [illegible]