Μιγαδική / 27/11/07 / Μάθημα 16

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω Ω χωρίο ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{C}$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής για την οποία υποθέτω $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ $\forall$ τρίγωνο $\Delta \subset \Omega$.

Τότε $\exists$ $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $F' = f$.

(και άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κατά τμήματα C^1 κλειστή καμπύλη στο Ω)

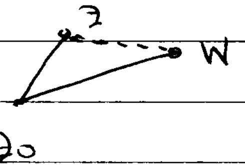
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $z_0 \in \Omega$ σταθεροποιημένο. Για $z \in \Omega$

Ορίζω $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$, όπου $[z_0,z]$ το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z_0 και τέλος το z.

Θα δείξω $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$

δηλαδή $\lim_{w \to z} \dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$



Έχω: $F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta$ επειδή στο τρίγωνο το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

Επομένως
$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta \cdot \frac{1}{w-z} - f(z) =$$
$$= \frac{1}{w-z}\int_{[z,w]} [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta$$

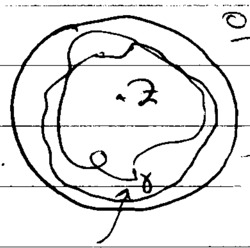
Και:
$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| = \frac{1}{|w-z|}\cdot\left|\int_{[z,w]} [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\cancel{|w-z|}}\cdot\cancel{|w-z|}\cdot\sup_{\zeta\in[z,w]}|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon \text{ όταν } |z-w| < \delta$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό χωρίο, $\alpha \in \Omega$
$f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω, ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{\alpha\}$
Τότε i) $\exists$ $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$.
ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ $\forall$ γ κατά τμήματα C^1 κλειστή καμπύλη στο Ω.

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό χωρίο.
$f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση
γ κατά τμήματα C^1 κλειστή καμπύλη στο Ω
και $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ ($\gamma^* \to$ η εικόνα της γ)
Τότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)\cdot$(δείκτης στροφής της γ ως προς το z $\equiv \operatorname{Ind}\gamma(z)$)

Όπου, $\operatorname{Ind}\gamma(z)$ μετράει πόσες φορές η κλειστή καμπύλη γ γυρίζει γύρω από το z και ισχύει
$$\operatorname{Ind}\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Απόδειξη
Ορίζω $g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z), & \text{όταν } \zeta = z \end{cases}$



Η g είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z\}$ και συνεχής στο z.
Άρα εφαρμόζεται το προηγ. Θεώρημα.
Επομένως σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη το ολοκλήρωμα είναι 0.
Αν γ μία καμπύλη:

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)d\zeta \underset{\substack{\gamma \text{ δεν περνάει} \\ \text{από το } z \\ \text{αφού } z \in \Omega\setminus\gamma^*}}{=\!=\!=} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \left(\int_\gamma \frac{dz}{\zeta - z}\right)^{(*)}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right)\cdot f(z)$$

Διαιρώ και με $2\pi i$ κι έχω το ζητούμενο.

Ερώτημα: γιατί $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$;;;

Αν γ μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο για κάθε σημείο του συμπληρώματος της εικόνας της καμπύλης ορίζεται ο δείκτης στροφής ο οποίος είναι ακέραιος αριθμός, είναι σταθερός σε κάθε συνιστώσα του συμπληρώματος ~~της~~ της εικόνας της καμπύλης και είναι μηδέν στην εξωτερική συνιστώσα (στη μη φραγμένη)

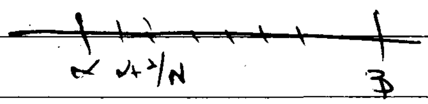
→ Ο δείκτης στροφής του γινομένου δύο κλειστών καμπυλών που δεν περνάνε από το μηδέν είναι το άθροισμα των δεικτών των καμπυλών.
↳ ειδικά για το μηδέν ισχύει

• Αν η γ περιέχεται σε δίσκο που δεν περιέχει το z υπάρχει η παράγουσα, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν, και μηδενικές φορές περνάει γύρω από το μηδέν.

• Αν η γ δεν περιέχεται σε δίσκο, $\gamma[\alpha,\beta] \not\ni z$ ~~γ^*~~ γ^* συμπαγές. Τότε $d(z,\gamma^*) > 0$, $\exists\ \rho > 0$ ώστε $|z - \gamma(t)| > \rho \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta]$

Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\forall\, t_1, t_2$, $|t_1 - t_2| < \delta$ τότε $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \frac{\rho}{1000}$

Διαμερίζω το $[\alpha,\beta]$ σε N ίσα κομμάτια ίσο στα $1/N < \delta$.



Και θεωρώ τον δίσκο $D(\gamma(\alpha_j), \rho/1000)$

Έχω συνθήκη:

$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} - \{z\}$ συνεχής

$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \beta$.

Και $\gamma([\alpha_j, \alpha_{j+1}]) \subseteq D_j \not\ni z$

Τότε, $$\int_{\gamma|[\alpha_j, \alpha_{j+1}]} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \log_{D_j}(\gamma(\alpha_{j+1})) - \log_{D_j}(\gamma(\alpha_j))$$

Οι λογάριθμοι διαφέρουν κατά $2\pi i$.
Μπορώ στο ~~...~~ ακρούλα να προσθέσω την κατάλληλη πολλαπλάσιο $2\pi i$ ώστε να γίνει ίσο με το άκρο D_{j-1} (καθώς το άκρο είναι και στα δύο διαδοχικά κοινό)

Τότε προσθέτοντας θα έχω: $\log_{D_{n-1}} \gamma(\beta) - \log_{D_0} \gamma(\alpha)$ και

$$\frac{\log_{D_{n-1}} \gamma(\beta) - \log_{D_0}(\gamma(\alpha))}{2\pi i} = k \in \mathbb{Z}$$

($\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ αφού η καμπύλη είναι κλειστή και πάλι οι δύο λογάριθμοι διαφέρουν κατά ένα $2\pi i$)

Επιπλέον,

$$\log_{D_j}(\gamma(t)) = \ln|\gamma(t)| + i\,\mathrm{Arg}_{D_j}(\gamma(t)), \quad t \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}]$$

Άρα: $$\int_{\gamma[\alpha_j, \alpha_{j+1}]} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \log_{D_j}(\gamma(\alpha_{j+1})) - \log_{D_j}(\gamma(\alpha_j)) =$$

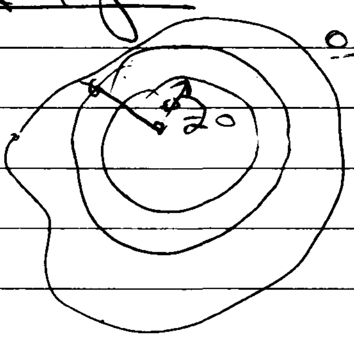
$$= \ln|\gamma(\alpha_{j+1})| - \ln|\gamma(\alpha_j)| + i\left[\mathrm{Arg}_{D_j}(\gamma(\alpha_{j+1})) - \mathrm{Arg}_{D_j}(\gamma(\alpha_j))\right]$$

Αν αθροίσω $\forall j$ έχω το πραγματικό μέρος $= 0$.
(φεύγουν ανά δύο και το πρώτο με το τελευταίο λόγω του ότι η καμπύλη είναι κλειστή)

Φανταστικό μέρος: $\frac{1}{2\pi i}\, i \sum \left[\mathrm{Arg}_{D_j}(\gamma(a_{j+1})) - \mathrm{Arg}(\gamma(a_j))\right]$

Σε κάθε δίσκο μετράμε πόσο μεταβλήθηκε η γωνία.
Παίρνω το άθροισμα → η συνολική αλγεβρική μεταβολή της γωνίας.
Διαιρώ και με 2π και έχω τους γύρους (ίσοι με κ).

Εφαρμογή



f ολόμορφη στο $O \ni z_0$.

Ισχυρισμός: ~~...~~ Υπάρχουν $a_n \in \mathbb{C}$, $n=0,1,2\ldots$
ώστε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ σε κάθε
δίσκο D κέντρου z_0 που περιέχεται στο O.
και $R \geq d(z_0, O^c)$
↳ απόσταση

Ιδέα της απόδειξης:

Θεωρώ $\gamma = D'(z_0,r)$ με $D'(z_0,r) \supseteq D$ αλλά $D'(z_0,r) \subseteq O$
και $\zeta \in \gamma$: $|\zeta - z_0| = r$, $r > r_1$

$|z-z_0| \leq r_1$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$

Από Πόρισμα: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma = |\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}}_{\equiv\, w} d\zeta =$$

$\left(\text{Αν } |w|<1, \ \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \right) \quad \left(w = \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}, \ |w| = \frac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} \le \frac{r_1}{r} < 1 \right)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \, d\zeta =$$

(Το $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ είναι φραγμένο, η γεωμ. σειρά ομοιόμορφα συγκλίνει άρα τελικά και το γινόμενο συγκλίνει ομοιόμορφα)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \, d\zeta =$$

(εφόσον έχω ομοιόμορφη σύγκλιση σειρά και ολοκλήρωμα εναλλάσσονται)

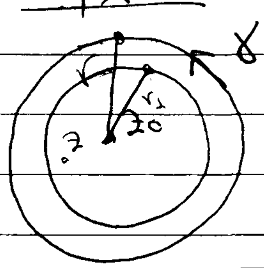
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right]}_{a_n} \cdot (z-z_0)^n$$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ | 29/11/07 | Μάθημα 17

Ω ανοιχτό κυρτό, f ολόμορφη στο Ω
γ κατά τμήματα C^1 κλειστή καμπύλη στο Ω και $z \in \Omega \setminus \gamma^*$
τότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z)$

Ω ανοιχτό σύνολο, f ολόμορφη στο Ω και $z_0 \in \Omega$. Τότε σε κάθε ανοιχτό δίσκο D με κέντρο z_0 ώστε $D \subset \Omega$ ισχύει
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ με $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$

Απόδειξη



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}\, d\zeta =$$

γ περιφέρεια θετικά προσανατολισμένη, με κέντρο z_0 και ακτίνα r ώστε $\{z : |z - z_0| \le r\} \subset \Omega$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n\, d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right] (z - z_0)^n$$

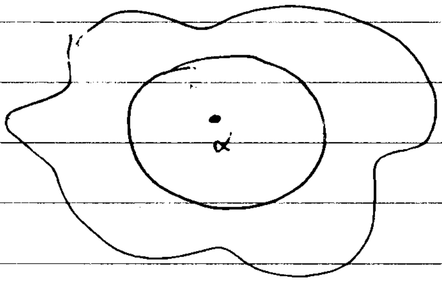
Βγάλαμε τον τύπο:
$f^{(n)}(z_0) = n!\, \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$ όταν z_0 το κέντρο της περιφέρειας

Πιο γενικά θα δούμε κάποια στιγμή ότι $f^{(n)}(z) = n!\, \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$ όπου γ όπως παραπάνω
για κάθε z στον δίσκο

ΠΟΡΙΣΜΑ $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε
i) f είναι $C^\infty(\Omega)$
ii) f' είναι ολόμορφη στο Ω

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\alpha \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω, ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{\alpha\}$.
Τότε f ολόμορφη στο Ω (συν. $\exists$ και το $f'(\alpha)$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σε κάθε τρίγωνο που περιέχεται στον δίσκο $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Άρα $\exists$ ολόμορφη F ώστε $F' = f$ στο D.
Άρα από το πόρισμα f ολόμορφη.

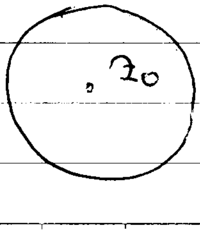
ΘΕΩΡΗΜΑ (Morera): $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής.
Υποθέτουμε ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ $\forall$ τρίγωνο $\Delta \subset \Omega$. Τότε f ολόμορφη στο Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $D \subseteq \Omega$ δίσκος ανοιχτός. Άρα η f έχει παράγουσα F στο $D \Rightarrow f = F'$ ολόμορφη στο D.

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ CAUCHY:
Ω ανοιχτό σύνολο, f ολόμορφη στο Ω, $z_0 \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\{z : |z - z_0| \le r\} \subset \Omega$.
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ το ανάπτυγμα της f.
Τότε $$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \le \frac{M(z_0, r)}{r^n}$$

όπου $M(z_0, r) = \max\{|f(\zeta)| : |\zeta - z_0| = r\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$|\alpha_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\zeta : |\zeta - z_0| = r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} =$$

$$= r \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| = \frac{M(z_0, r)}{r^n}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE

Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$|\alpha_n| \leq \dfrac{M(0,r)}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}$ όπως f φραγμένη. Άρα $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$ $(M \in \mathbb{R})$

$|\alpha_0| \leq M$

$0 \leq |\alpha_1| \leq \dfrac{M}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$ Άρα $\alpha_1 = 0$

$0 \leq |\alpha_2| \leq \dfrac{M}{r^2} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$ Άρα $\alpha_2 = 0$.

Και γενικά για $n \geq 1$ $|\alpha_n| \leq \dfrac{M}{r^n} \to 0$

Άρα $\alpha_n = 0$

Άρα f σταθερή

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κάθε πολυώνυμο p βαθμού $n \geq 1$ έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

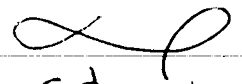
Τότε $\dfrac{1}{p}$ ακέραια στο $\mathbb{C}$ και $\lim_{z \to \infty} \dfrac{1}{p(z)} = \lim_{z \to \infty} \dfrac{1}{z^n \left(\frac{\alpha_0}{z^n} + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \dots + \alpha_n \right)}$

$$= \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\alpha_n} = 0 \cdot \frac{1}{\alpha_n} = 0.$$

Τότε η $\frac{1}{p}$ είναι φραγμένη

Τότε από θεώρημα Liouville, $1/p$ σταθερή

Δηλαδή p σταθερή $\Rightarrow n=0$ Άτοπο



γ κατά τμήματα C^1 κλειστή καμπύλη και $z \notin \gamma^*$

τότε $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$

Θ.Δ.Ο. σε κάθε συνεκτική συνιστώσα η Ind_γ είναι σταθερή.

$Ind_\gamma : \mathbb{C} - \gamma^* \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Αρκεί Ind_γ να είναι συνεχής αφού συνεχής εικόνα συνεκτικού είναι συνεκτικό

$z_0 \in \mathbb{C} - \gamma^*$, $r>0$ $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} - \gamma^*$

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}d\zeta =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

αφού παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$

Άρα f ολόμορφη $\Rightarrow$ συνεχής $\Rightarrow$ σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα

Άλλωστε για $n \geq 1$ η $\frac{1}{z^n}$ έχει παράγουσα και άρα σε κλειστή καμπύλη γ, $\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = 0$.

Επομένως,
$$Ind_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = Ind_\gamma(z_0)$$

Ειδικά για την εξωτερική συνιστώσα:

$$C = Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \xrightarrow[z\to\infty]{}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}\right| \le \frac{1}{2\pi}(\text{μήκος }\gamma)\cdot \max_{\zeta\in\gamma}\left|\frac{1}{\zeta-z}\right| = k\cdot \max_{\zeta\in\gamma}\frac{1}{|z|-|\zeta|} \le$$

$$\le k\cdot\frac{1}{|z|-M} \xrightarrow{z\to\infty} 0$$

~~Που~~ (διότι $|\zeta|\le M$ $\forall\, \zeta\in\gamma$ και $z\to\infty$)

Άρα πράγματι $\underline{C=0}$. (στην εξ. συνάρτηση)

Αν γ_1, γ_2 κατά επανάληψη C^1 κλειστές καμπύλες που δεν περνάνε από το μηδέν ($0\notin\gamma_1^*$, $0\notin\gamma_2^*$)

Τότε ~~$Ind(\gamma_1\gamma_2)$~~ $Ind_{\gamma_1\gamma_2}(0) = Ind_{\gamma_1}(0) + Ind_{\gamma_2}(0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$Ind_{\gamma_1\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1\gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(\gamma_1\gamma_2)'(t)}{(\gamma_1\gamma_2)(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2(t)+\gamma_1(t)\gamma_2'(t)}{(\gamma_1\gamma_2)(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}dt =$$

$$= Ind_{\gamma_1}(0) + Ind_{\gamma_2}(0)$$

Άσκηση: Έστω $D(0,r_1,r_2) = \{z : r_1<|z|<r_2\}$, $0\le r_1<r_2\le\infty$

Δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\omega: D(0,r_1,r_2)\to\mathbb{C}$

ώστε $[\omega(z)]^2 = z$ $\forall\, z\in D(0,r_1,r_2)$

ΛΥΣΗ

Έστω $\sigma(t) = re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$ με $r_1<r<r_2$

Και $\gamma_1(t) = \omega(\sigma(t)) = \gamma_2(t)$

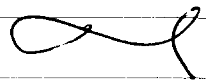
Αν πάρω το γινόμενο $\gamma_1(t)\gamma_2(t)$ έχω

$Ind_{\gamma_1\gamma_2}(0) = 2\,Ind_{\omega(\sigma)}(0) =$ ζυγός αριθμός

$(\gamma_1\cdot\gamma_2)(t) = \omega^2(\sigma(t)) = \sigma(t)$

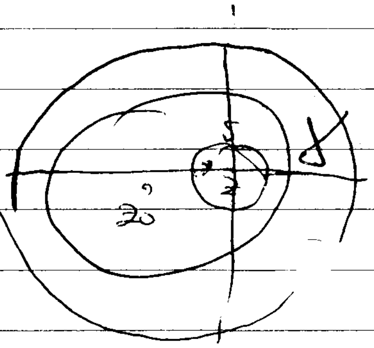
Άρα $Ind_{\gamma\gamma_2}(0) = Ind_{re^{it}}(0)$. Όμως $Ind_{re^{it}}(0) = 1 \neq$ ζυγός
Άτοπο

(Παρατήρηση η $w(\gamma(t))$ δεν περνάει απ' το μηδέν αφού $[w(z)]^2 = z$ και $z \neq 0$ αφού είναι στον δακτύλιο)



$$f^{(n)}(z_0) = n!\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (*)$$

$|z - z_0| < r$



Για το z δεν ξέρω αν ισχύει η $(*)$

$$f^{(n)}(z) = n!\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$ για z κέντρο δίσκου με ακτίνα δ.

Αρχή Ν.Σ.Ο. (ισχύει) $\longrightarrow$ ||

$$n!\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

Έχω πρόβλημα στο z

Φέρνω καθέτες από το z. Τότε το ολοκλήρωμα σε κάθε επιμέρους κομμάτι (σε κάθε ένα από τα 4) είναι 0. Γιατί:
Σε κάθε τέτοιο η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολόμορφη αφού δεν περιέχει το z.
Μπορώ να βρω χωρίο ανοικτό που να περιέχει το κάθε κομμάτι. (φέρνω χορδή).
Τότε σε κάθε κλειστή καμπύλη του χωρίου ανοιχτού την βρήκαμε το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.
Επομένως η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων (στην γ και στη δ) είναι 0, άρα αυτά είναι ίσα.

ΜΙΓΑΔΙΚΗ | 04/12/07 | Μάθημα 18

Έστω γ κλειστή κατά τμήματα C^1

$f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς

Η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί της γ^*

Τότε $\sum$ και $\int$ εναλλάσσονται

Δηλαδή αν $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \varphi$ τότε $\int_\gamma \varphi(z)dz = \int_\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right] dz =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_\gamma f_n(z)dz$

$$\int_\gamma \varphi(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_\gamma f_n(z)dz$$

όπου $\varphi(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ ομοιόμορφα

Όπως έχουμε δείξει ότι αν $g_n \to g$ ομοιόμορφα επί του γ (και όλα συνεχή)

τότε $\int_\gamma g_n(z)dz \to \int_\gamma g(z)dz$

Επομένως για $g_n \equiv \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$

$g \equiv \varphi(z)$ έχουμε το ζητούμενο.

Πράγματι, $\left|\int_\gamma g_n dz - \int_\gamma g(z)dz\right| = \left|\int_\gamma [g_n(z) - g(z)]dz\right| \le$

$\le (\text{μήκος } \gamma) \sup_{z\in\gamma} |g_n(z) - g(z)| \to 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ MORERA:

Ω ανοιχτό, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

$\forall$ τρίγωνο $\Delta \subset \Omega$, τότε f ολόμορφη στο Ω.

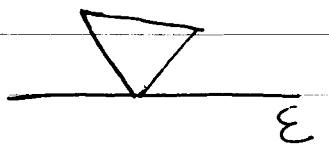
Σημείωση: Αρκεί να ελέγχουμε τα τρίγωνα Δ που με το εσωτερικό τους περιέχονται στο Ω (και φτάνει για δισκάκια στο Ω)

Ασκηση: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, ε ευθεία, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω
ολόμορφη στο $\Omega \setminus \varepsilon$
→ Τότε f ολόμορφη στο Ω.

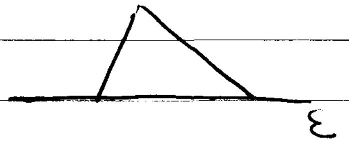
ΛΥΣΗ:

· Αν το τρίγωνο Δ δεν τέμνει την ε, $\int_{\partial \Delta} f = 0$.
· Διαχωρισμός: Αρκεί να ελέγξω δύο περιπτώσεις τριγώνων.

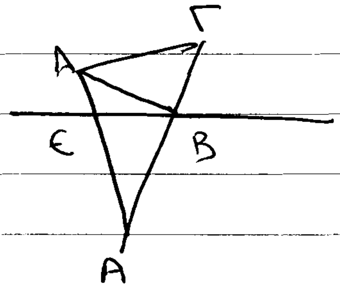
α)



β)



Πράγματι, αν έχουμε



$\int_{\Delta} = \int_{AB E} + \int_{B\Gamma\Delta E}$

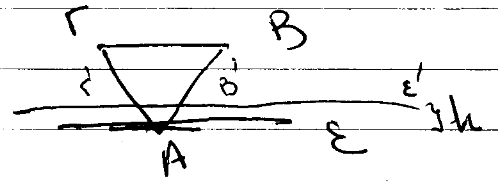
$\int_{ABE} = 0$ (από περίπτωση β).

Έχω $\int_{B\Gamma\Delta E}$ φέρνω ΔB άρα $\int_{B\Gamma\Delta E} = \int_{EB\Delta} + \int_{\Delta B \Gamma}$

περίπτωση β   περίπτωση α

Απόδειξη για τις περιπτώσεις α, β

α)



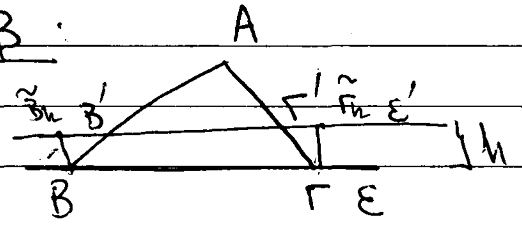
$\varepsilon' \parallel \varepsilon$ σε απόσταση h

Στο $\Gamma' B' B \Gamma$ το ολοκλήρωμα είναι 0 (σπάει σε 2 τρίγωνα που δεν τέμνουν την ε)

Άρα $\int_{AB\Gamma} f(z)dz = \int_{AB'\Gamma'} f(z)dz$

$$0 \le \left|\int_{AB\Gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{AB'\Gamma'} f(z)dz\right| \le \max_{AB\Gamma}|f| \cdot \underbrace{(\text{μήκος } AB'\Gamma')}_{\to 0 \text{ όταν } h\to 0} \to 0$$

Περίπτωση Β:



$\varepsilon' \parallel \varepsilon$ σε ύψος h

Πάλι $\int_{AB\Gamma} = \underbrace{\int_{AB'\Gamma'}}_{=0} + \int_{B'B\Gamma\Gamma'}$

↳ αφού το τρίγωνο δε τέμνει την ε.

Άρα $\int_{AB\Gamma} f(z)dz = \int_{B'B\Gamma\Gamma'B'} f(z)dz = \int_{B\Gamma} f(z)dz + \underbrace{\int_{\Gamma\Gamma'} f(z)dz}_{\to 0 \text{ όταν } h\to 0} + \int_{\Gamma'B'} f(z)dz + \underbrace{\int_{B'B} f(z)dz}_{\to 0 \text{ όταν } h\to 0}$

Και $\int_{B\Gamma} f(z)dz + \int_{\Gamma'B'} f(z)dz = \int_{B\Gamma} f(z)dz - \int_{B'\Gamma'} f(z)dz$

Αυστηρή απόδειξη:

Φέρνω κάθετες προβολές των σημείων από την ε στην ε'

Έχω: $\int_{B\Gamma} f(z)dz - \int_{\tilde{B}_h\tilde{\Gamma}_h} f(z)dz \pm \underbrace{\int_{\tilde{B}_h B'} f(z)dz}_{\to 0,\ h\to 0} \pm \underbrace{\int_{\Gamma'\tilde{\Gamma}_h} f(z)dz}_{\to 0,\ h\to 0} =$

~~Περίπτωση 1~~ ~~Περίπτωση 2~~

$= \int_{B\Gamma} f(z)dz - \int_{\tilde{B}_h\tilde{\Gamma}_h} f(z)dz$

Αν $z \in B\Gamma$: $z = t\Gamma + (1-t)B$, $t \in [0,1]$

Αν $z \in \tilde{B}_n\tilde{\Gamma}_n$: $z = t\tilde{\Gamma}_n + (1-t)\tilde{B}_n$, $t \in [0,1]$

καθώς το $B\Gamma\tilde{\Gamma}_n\tilde{B}_n$ είναι ορθογώνιο

Έχουμε: $$\int_0^1 f(t\Gamma + (1-t)B)\cdot(\Gamma - B)\,dt - \int_0^1 f(t\tilde{\Gamma}_n + (1-t)\tilde{B}_n)(\Gamma - B)\,dt$$

$$= (\Gamma - B)\int_0^1 \left[f(t\Gamma + (1-t)B) - f(t\tilde{\Gamma}_n + (1-t)\tilde{B}_n)\right]dt$$

Και παίρνοντας απόλυτες τιμές έχουμε

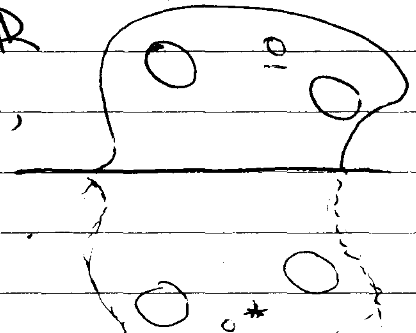
$$\le |\Gamma - B|\cdot \sup_{t\in[0,1]} \left| f(t\Gamma + (1-t)B) - f(t\tilde{\Gamma}_n + (1-t)\tilde{B}_n)\right| <$$

$$< |B - \Gamma| \cdot \frac{\varepsilon}{|B-\Gamma|}$$

για $h < \delta$ λόγω ομοιόμορφης συνέχειας της f σε ένα συμπαγές που περιέχει τα πάντα εκεί που δουλεύουμε

ΑΡΧΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

Ω ανοιχτό $\subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ και ένα κομμάτι του συνόρου του Ω είναι ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$



Έστω $f : \Omega \cup I \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\Omega \cup I$, ολόμορφη στο Ω.

Και η f στο I παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$.

Τότε η συνάρτηση ανακλάται

Θέτω $\Omega^* = \{w \in \mathbb{C} : \bar{w} \in \Omega\}$

Τότε η f έχει επέκταση $F : \Omega \cup I \cup \Omega^* \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο $\Omega \cup I \cup \Omega^*$ με τύπο

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{αν } z \in \Omega \cup I \\ \overline{(f(\bar{z}))} & \text{αν } z \in \Omega^* \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την F που ορίζεται στην πρόταση.

Αν $z \in \Omega \cup \Omega^*$ η f είναι συνεχής στο z.

Αν $z \in I$, το ονομάζω $x \in I$ αφού $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega \cup I}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega \cup I}} f(z) = f(x)$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^*}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^*}} \overline{f(\bar{z})} \overset{(\text{θέτω } w = \bar{z})}{=} \overline{\lim_{\substack{w \to \bar{x} = x \\ w \in \Omega}} f(w)} = \overline{f(x)} = f(x) \in \mathbb{R}$$

γιατί $f(I) \subseteq \mathbb{R}$

Επομένως η F είναι συνεχής.

· Έστω τώρα $z \in \Omega^*$ και $\lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} =$

$$= \lim_{w \to z} \frac{\overline{f(\bar{w})} - \overline{f(\bar{z})}}{w - z} \overset{(\text{θέτω } s = \bar{w})}{=} \lim_{s \to \bar{z}} \frac{\overline{f(s) - f(\bar{z})}}{\bar{s} - z} = \overline{\lim_{s \to \bar{z}} \left(\frac{f(s) - f(\bar{z})}{s - \bar{z}} \right)} =$$

$$= \overline{(f'(\bar{z}))}$$, άρα $F'(z)$ υπάρχει και $F'(z) = \overline{(f'(\bar{z}))}$ για $z \in \Omega^*$

F ολόμορφη στο $(\Omega \cup \Omega^*) \setminus I$ και από προηγ. άσκηση F ολόμορφη στο $\Omega \cup \Omega^* \cup I$.

!!!

Πρόταση: Ω ανοιχτό (χωρίο) και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ C^2 αρμονική συνάρτηση στο Ω ($u_{xx} + u_{yy} = 0$).

Τότε η u έχει στο Ω αρμονική συζυγή v (δηλαδή $\exists f : f = u + iv$ ολόμορφη στο Ω)

~~Υπάρχει αν~~ $f = u + iv$ ~~ολόμορφη~~ ~~βάσει του~~ ~~Cauchy-Riemann~~

$f' = u_x + i v_x = \partial u_x - i u_y$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θέτω $g = u_x - i u_y$, διαφορίσιμη ως προς x, y

Πρέπει $\left.\begin{array}{l}(u_x)_x = (-u_y)_y \\ (u_x)_y = -(-u_y)_x\end{array}\right\}$ συνθήκες Cauchy-Riemann

1) $\Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$ (ισχύει γιατί u αρμονική)
2) $\Leftrightarrow u_{xy} = u_{yx}$ (ισχύει γιατί είναι C^2).

Άρα η g είναι ολόμορφη στο Ω

Έστω F μία παράγουσα της g στο κυρτό Ω

$\left.\begin{array}{l} g = F' = (\mathrm{Re}F)_x - i(\mathrm{Re}F)_y \\ \parallel \\ u_x - i u_y \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} u_x = (\mathrm{Re}F)_x \\ u_y = (\mathrm{Re}F)_y \end{array}}$,

$\Downarrow$

$u = \mathrm{Re}F + c$, $c \in \mathbb{R}$

Θέτω $f = F + c$ ολόμορφη και $\mathrm{Re}f = \mathrm{Re}(F+c) = u$

Άρα η u έχει αρμονική συζυγή

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν Ω ανοιχτό και $u: \Omega \to \mathbb{R}$ C^2, αρμονική τότε u κλάσης C^∞ (ως προς τις πραγμ. παραγώγους) (πραγμ. μεταβλητές)

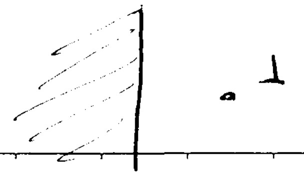
∞

ΠΡΟΤΑΣΗ:
Αν $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 αρμονική και u άνω φραγμένη (π.χ. $u \le 0$)
τότε u σταθερά στο $\mathbb{C}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
Αφού $\mathbb{C}$ κυρτό, υπάρχει f ακέραια ώστε
$u = \mathrm{Re}f$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - 1}$ κι αφού $f(z) - 1 \neq 0 \ \forall z$ καθώς $u \le 0$

η g είναι ακέραια



$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-1|} \le \frac{1}{1}$$

↳ δείχνει την ελάχιστη απόσταση της $f(z)$ από το 1 για να ~~…~~ είναι φραγμένη.

Από Θ. Liouville έπεται g σταθερή
$\Rightarrow f$ σταθερή.
Και άρα $u = \mathrm{Re} f$ σταθερή.

<u>ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ</u>: Θέτω $\omega(z) = e^{f(z)}$ με $\mathrm{Re} f = u$

↓ ακέραια αφού $f(z)$ ακέραια.

$$|\omega(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re} f} = e^{u} \le e^{0} = 1$$

Άρα η $\omega(z)$ φραγμένη
↳ από Liouville $\rightarrow$ σταθερή
$e^{f(z)}$ σταθερή $= c$.
Άρα, $f(z) \in \log c \quad \forall z \in \mathbb{C}$
Άρα $f(\mathbb{C}) \subseteq \log c$
↳ διακριτό σύνολο ισόμορφο με το $\mathbb{Z}$
συνεκτικό ($\mathbb{C}$ συνεκτικό, f συνεχής)
↓ άρα μονοσύνολο
Άρα ~~…~~ $\log c$ μονοσύνολο.

Άρα f σταθερή.