ΜΙΓΑΔΙΚΗ / 30/10/07 / Μάθημα 9

1) Έστω $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy + c$

$f = u + iv$, $u_x = v_y$, $u_x = -v_y$

$f' = u_x + i v_x =$
$= u_x - i u_y =$
$= 2x + i2y =$
$= 2(x+iy) = 2z$

2) $\mathbb{C} - \{0\}$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u+iv$ ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \{0\}$

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$

Οπότε $u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \{z + \bar{z}\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{z}{z\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}\right\} =$

$= Re \frac{1}{z}$

$v = Im \frac{1}{z} + c = \frac{-y}{x^2+y^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα: f

3) z^2, $f'(z) = 2z \neq 0$ αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Άρα διατηρεί τις γωνίες σε κάθε $z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Στο μηδέν:
$\rightarrow$ Τις διπλασιάζει

4) z^3, $f'(z) = 3z^2$ Για $z \neq 0$ τις διατηρεί
Για $z = 0$ τις τριπλασιάζει

5) z^p, $f'(z) = p \cdot z^{p-1}$. Για $z \neq 0$ τις διατηρεί
Για $z = 0$ τις p-πλασιάζει

Πολλαπλότητα → η πιο μικρή τάξη παραγώγου της f που είναι $\neq 0$.

6) e^z → ακέραια
↳ $(e^z)' \neq 0$ → τις διατηρεί παντού τις γωνίες. (σύμμορφη)

$\mathcal{L}e$

Αν $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$

$S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ και θα λέμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει $\iff$ η S_n συγκλίνει προς πεπερασμένο μιγαδικό αριθμό.

Αν $S_n \to w \in \mathbb{C}$ τότε γράφω $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = w$

Παρατήρηση: Αν $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε $\alpha_n \to 0$

$(\alpha_n = S_n - S_{n-1} \to w - w = 0)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. π.χ. $\frac{1}{n} \to 0$. $\sum \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ → συγκλίνει για $\alpha > 1$, αποκλίνει για $\alpha \leq 1$

↓ $\lim_{\lambda \to \infty} \int_1^{\lambda} \frac{dx}{x^{\alpha}}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει $\iff$ S_n είναι Cauchy
$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ ώστε για $n_0 \leq n \leq m$ ισχύει:
$|\alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$

$|\alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_m| \leq |\alpha_n| + |\alpha_{n+1}| + \dots + |\alpha_m|$

Πόρισμα: Αν $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Το αντίστροφο δεν ισχύει → π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(Αν a_n θετικών πραγματικών όρων μπορώ να γράφω $\sum |a_n| < \infty$ όταν συγκλίνει!)

Θεώρημα

Έστω $a_n \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $\rho = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

1ο Αν $\rho < 1$ τότε οι σειρές $\sum |a_n|$ και $\sum a_n$ συγκλίνουν

2ο Αν $\rho > 1$ τότε οι σειρές $\sum |a_n|$ και $\sum a_n$ δεν συγκλίνουν

3ο Αν $\rho = 1$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αλλά η απάντηση εξαρτάται από την κάθε περίπτωση.

(limsup → το πιο μεγάλο υπακολουθιακό όριο
→ Μπορούν να υπάρχουν και άπειροι όροι πάνω απ' το limsup
(π.χ. $\frac{1}{n}$)
Όμως ∃ $q >$ limsup ώστε να υπάρχουν πεπερασμένοι όροι πάνω απ' το q.)

Απόδειξη

1)

Έστω $q = \frac{\rho + 1}{2}$ $\qquad \rho \quad q \quad 1$

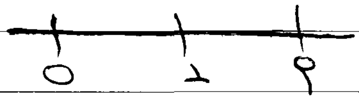
Τότε $\rho < q < 1$

Τότε υπάρχουν πεπερασμένοι όροι πάνω από q.

Άρα $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $\; 0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n$

Επομένως $\sum |a_n|$ συγκλίνει επειδή q^n συγκλίνει

2) Αρκεί ν.δ.ο $\alpha_n \not\to 0$



Πόσοι όροι της $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$ είναι πάνω από το 1;

$\exists$ α_{k_n} ώστε $\sqrt[k_n]{|\alpha_{k_n}|} \to \rho > 1$

Άρα $\exists$ n_0: $\sqrt[k_n]{|\alpha_{k_n}|} \geq 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |\alpha_{k_n}| \geq 1 \ \forall n \geq n_0$.

Συνεπώς $\alpha_n \not\to 0$ και άρα η $\sum \alpha_n$ δεν συγκλίνει

άρα και η $\sum |\alpha_n|$ δεν συγκλίνει.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} \to 1 \Rightarrow \rho = 1$ αλλά για κάποια α συγκλίνει και για κάποια α δεν συγκλίνει.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ:

$\alpha_n \neq 0 \ \forall n$

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = \omega$ τότε:

1) Αν $\omega < 1 \Rightarrow \sum |\alpha_n|$ και $\sum \alpha_n$ συγκλίνουν

2) Αν $\omega > 1 \Rightarrow \sum |\alpha_n|$, $\sum \alpha_n$ δεν συγκλίνουν

3) Αν $\omega = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά.

ΑΣΚΗΣΗ:

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$

Αρκεί ν.δ.ο $\delta_n \to 0$

$n = (1+\delta_n)^n =$ $(\delta_n > 0)$

$= 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \dots \geq$

$\geq \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 \Rightarrow 0 \leq \delta_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \to 0$

$\Downarrow$

$\delta_n^2 \to 0$

Γενικά $\sqrt[n]{P(n)} \to 1$ αν μεγιστοβάθμιος συντελεστής θετικός

ΜΙΓΑΔΙΚΗ / 01/11/07/ Μάθημα 10

$f_n : X \to \mathbb{C}$

↳ σύγκλιση ομοιόμορφη και κατά σημείο

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$f_n : X \to \mathbb{C}$. Πότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε ~~προς~~ κάποια f;

($\iff$) $f_n(x)$ είναι ομοιόμορφα Cauchy επί του X.

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

ή $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\sum f_n$ $\qquad f_n : X \to \mathbb{C}$

↳ συγκλίνει σε μια σειρά

Ομοιόμορφα Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon$ ώστε για $n_\varepsilon \leq n \leq m$ να ισχύει

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon$$

Κριτήριο Weierstrass:

→ $\sum |f_n(x)| \leq \sum M_n$

↳ Αν $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n$ και $\sum M_n$ συγκλίνει τότε η

$\sum f_n$ και $\sum |f_n|$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο X.

Κριτήριο Dirichlet

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ | $a_n(x) \geq 0$, $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$ και $a_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} 0$

$b_n \in \mathbb{C}$ αλλά $\exists$ $M > 0$ ώστε $|b_0(x) + b_1(x) + \dots + b_n(x)| \leq M$

$\forall x \in X$ και $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $\sum \alpha_n b_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X και

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n(x) B_n(x)\right| < 2M\alpha_N(x)$$

$\propto$

$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n z^n$ (Πολυώνυμο με κέντρο το 0) ολόμορφη συνάρτηση.

Αν πάρω άλλο κέντρο, πχ μέσω του μετασχηματισμού $z = w - \beta$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (w-\beta)^n$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n=0,1,\dots$ και $\alpha \in \mathbb{C}$. Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-\alpha)^n = \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \alpha_2(z-\alpha)^2 + \dots$$

Ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο το α.

Η $f(z) = \sum_{n=0} \alpha_n (z-\alpha)^n$ ορίζεται στον ανοιχτό δίσκο με ακτίνα την ακτίνα σύγκλισης όπου βγαίνει ολόμορφη (θα το δείξουμε αυτό)

Θα δείξουμε ότι $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot n (z-\alpha)^{n-1}$

$\vdots$ $\quad \alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$

$\alpha = 0$

Λήμμα Abel: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ η δυναμοσειρά με κέντρο 0. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$.

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $a_n z_0^n$ είναι φραγμένη
($|a_n z_0^n| \le M \ \forall n$, $M<\infty$)

Τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει στο $\{z : |z| < |z_0|\}$ (και απόλυτα) και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\{z : |z| < |z_0|\}$

ΠΡΟΣΟΧΗ → δεν σημαίνει ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση σ' όλο το δίσκο.

Απόδειξη

• Έστω $z \in \{z : |z| < |z_0|\}$

Ο γενικός όρος σε απόλυτη τιμή είναι $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le$
$\le M \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$

Από κριτήριο ~~Weierstrass~~ σύγκρισης η σειρά συγκλίνει

$\frac{|z|}{|z_0|} < 1$ άρα συγκλίνει

• Θεωρούμε τώρα $0 < r < |z_0|$ και $z \in \{z : |z| \le r\}$

$$\sup_{|z|\le r} |a_n z^n| \le \sup_{|z|\le r}\left(|a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right) \le$$
$$\le M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n = \underbrace{M_n}_{\text{ανεξάρτητο του } z} \quad \text{και } \sum M_n < \infty \text{ αφού } \left|\frac{r}{z_0}\right| < 1$$

Επομένως συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές.
από κριτήριο Weierstrass

Παράδειγμα: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $a_n = 1$, $z_0 = 1$
Τότε $a_n z_0^n = 1$. Ισχύει το λήμμα του Abel.
Όμως δεν έχει ομοιόμορφη σύγκλιση σ' όλο το δίσκο

1ος τρόπος $|z|<1$: $\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$\sup_{|z|<1} \left| \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \right| = \sup_{|z|<1} \frac{|z^{N+1}|}{|1-z|} \geq \frac{1}{2}$ για $z \to -1$

$\neq 0$

2ος τρόπος: Έστω ότι έχω ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum z^n$ στο $\{z : |z|<1\}$. Θα καταλήξω σε (άπειρο) άτοπο

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ n_0 : n_0 \leq n \leq m$ τότε $\sup_{|z|<1} \left| \sum_{k=n}^{m} z^k \right| < \varepsilon$

$\sup_{|z|\leq 1} \left| \sum_{k=n}^{m} z^k \right|$ άρα η σειρά θα συνέκλινε στη κλειστή. Άρα θα συνέκλινε για $z=1$ το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, $z_0 = 1$, $\frac{1}{n^2}$ φραγμένη

Εδώ έχουμε πάντα ομοιόμορφη σύγκλιση

$\sup_{|z|<1} \left| \frac{1}{n^2} \cdot z^n \right| = \frac{1}{n^2} \equiv M_n \Rightarrow$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z|\leq 1$

$|z|\leq 1$

Αν θεωρήσω $R = \sup\{|z_0| : a_n z_0^n \text{ φραγμένη}\} = \sup\{|z_0| : \text{η } \sum a_n z_0^n \text{ συγκλίνει}\}$

Τότε 1) Για $|z|<R$ έχουμε σύγκλιση των σειρών $\sum a_n z^n$ και $\sum |a_n z^n|$. Αυτή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή του $\{z : |z|<R\}$

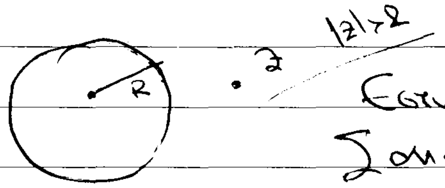
2) Για $|z|>R$ η $\sum a_n z^n$ δεν συγκλίνει προς μιγαδικό αριθμό

3) Για $|z|=R$ μπορεί να έχουμε σύγκλιση μπορεί και όχι ή μάλλον σε κάποια σημεία έχουμε σύγκλιση, σε κάποια όχι.

Το R: $0 \le R \le \infty$ και λέγεται ακτίνα σύγκλισης.

• Για το 1) $\Rightarrow$ $r<R \Rightarrow \exists\, z_0 :$ $r<|z_0|<R$ και άρα $a_n z_0^n$ φραγμένο.
Άρα από το λήμμα του Abel στο $\{z : |z| \le r\}$ έχω ομοιόμορφη σύγκλιση (και απόλυτη).

• Για το 2) $\Rightarrow$



Έστω ότι η σειρά συγκλίνει στο z: $\sum a_n z^n$ συγκλίνει, άρα $a_n z^n \to 0$, άρα $a_n z^n$ φραγμένη $\Rightarrow |z| \le R$. Άτοπο

Ασκήσεις 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$

1) Για $|z| \le 1$ από κριτήριο Weierstrass έχω ομοιόμορφη σύγκλιση.
Αν $|z|>1$, $\frac{|z|^n}{n^2} \to \infty$

Επομένως $R=1$

2) $R = 1$

$|z| = 1, \quad |z|^n = 1 \not\to 0$

3) Για $z_0 = 1 \to$ Αλλά Abel

Για $|z| > 1 \quad \left|\frac{z^n}{n}\right| \geq \frac{|z|^n}{n} \to \infty$ $\Big\}$ $R = 1$

Για $z = 1$ έχω σύγκλιση

Για $z = 1$ δεν έχω σύγκλιση

<u>Ασκήσεις</u>: 1) $E \subset \{z : |z| < 1\}$

Τότε (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

(1) Η $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί των E

(2) Το $\sup_{z \in E} |z| < 1$

(3) $\overline{E} \cap \{z : |z| = 1\} = \emptyset$

2) $E \subset \{z : |z| \leq 1, \ z \neq 1\}$

τ.α.ε.ι:

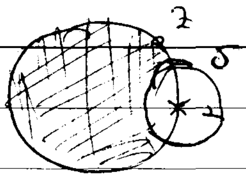
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί των E.

2) ~~[illegible]~~ $\inf_{z \in E} |z-1| > 0$

3) ~~$1 \notin \overline{E}$~~

<u>Λύση (της 2)</u>

Θεωρούμε $z \neq 1$ και $\delta > 0$ $(\delta < |z-1|)$ και



το σύνολο $\{w : |w| \le 1 \,,\ |w-1| \ge \delta\}$

$\left| \frac{1}{n} \cdot z^n \right| = \frac{1}{n}|z|^n = \frac{1}{n} \to$ Συνθήκη Weierstrass

Θα πάρω $\alpha_n = 1/n$

$b_n = z^n$, $\quad S_N = \sum_{n=1}^{N} z^n = z \sum_{n=0}^{N-1} z^n = z\left(\frac{1-z^N}{1-z}\right)$

(Πρέπει να φράσσεται ανεξάρτητα των z και N)

$|z| \cdot \frac{|1-z^N|}{|1-z|} \le \frac{2}{|1-z|} \le \frac{2}{\delta} \equiv M$ από Dirichlet $\to$ έχω ομοιόμορφη

Δεν έχω ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ στο $\{z : |z| \le 1,\ z \ne 1\} = A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι έχω. Θα καταλήξω σε άτοπο.

Τότε $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \forall\ n_0 \le n \le m$ ισχύει

$$\sup_{z \in A} \left| \sum_{x=n}^{m} \frac{1}{x} z^x \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{\substack{x=n \\ (z=1)}}^{m} \frac{1}{x} \le \sup_{z \in A} \left| \sum_{x=n}^{m} \frac{1}{x} z^x \right| \quad \text{Άτοπο}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$

είναι $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$

Στην ειδική περίπτωση που $\alpha_n \ne 0\ \forall n$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$ υπάρχει εν $[0,+\infty]$ τότε $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$

Ίσως ότι:

$$\sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

$$R = \rho \in (0, \infty)$$

$$\downarrow \quad \sum \frac{1}{\rho^n} z^n \qquad \sum \frac{1}{\rho^n n} z^n \qquad \sum \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{n^2} z^n$$

$$R = \infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \left(\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n+1 \to \infty \right)$$

$$R = 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! \, z^n \qquad \left(\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 \right)$$

Μπαλικη / 06/11/07 / Μάθημα 11

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$

Πάντα ισχύει $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$

Ειδικά αν $\alpha_n \neq 0$ και $\exists \lim_n \dfrac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|} \in [0, +\infty]$

τότε $R = \lim_n \left| \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|$

Κριτήριο ρίζας: Παίζει ρόλο το $P(z) = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|}$

$1^{ος}$ Εστω $|z| < \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$

$|z| \cdot \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1$

$p(z) = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} < 1$

+ Βιβλίο σελ. 255-256

$2^{ος}$ $|z| > \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$

$\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} > 1$

Ανισότητα: ~~...~~

$\liminf \left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \le \liminf \sqrt[n]{|\alpha_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} \le \limsup \left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$

Εφαρμογές

1) Οι ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}$ είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

Για $z = 0 \to$ συγκλίνουν και οι δύο

Για $z \neq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$

$$z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n z^{n}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι αυτή και η αρχική έχουν τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης.

Έχουμε $\sqrt[n]{|a_n|}$ και $\sqrt[n]{n|a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

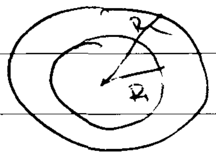
Άρα έχουμε το ίδιο limsup.
Επομένως οι δυναμοσειρές έχουν τις ίδιες ακτίνες.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα R_1

$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ με ακτίνα R_2

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \beta_n) z^n$ τι ακτίνα σύγκλισης έχει; $R = ;$

ΛΥΣΗ : • Αν $R_1 < R_2 \Rightarrow R = R_1$



• Στο R_1 συγκλίνουν και οι δύο
• Στο δακτύλιο μια συγκλίνει και η άλλη όχι, άρα το άθροισμα δεν συγκλίνει
• Απ' έξω δεν συγκλίνει καμία. Δεν μπορεί όμως το άθροισμα να συγκλίνει γιατί αν συνέκλινε θα έπρεπε να συγκλίνει σε όλο τον δίσκο. Άτοπο.

• Αν $R_2 < R_1 \Rightarrow R = R_2$
• Αν $R_1 = R_2 \Rightarrow R \geq R_1 = R_2$

Προσοχή: Μπορεί R να είναι οποιοδήποτε στοιχείο στο $[R_1 = R_2, +\infty]$.

Παραδείγματα: 1) $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ | $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)z^n \to$ πώ;

$R_1=1$, $R_2=1$ | $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to 1$ άρα $R=1$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \to R_1 = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} z^n \to R_2 = 4$ | $\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$ $\sum\left(1+\frac{1}{4^n}\right)z^n$ $\downarrow R=1$

$\sum_{n=0}^{\infty} -z^n \to \sum\left(1+\frac{1}{4^n}\right)z^n + \sum -(z)^n = \sum \frac{1}{4^n} z^n$

$\downarrow R_3=1$ $\qquad \downarrow R=4$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R \in (0,+\infty]$.

Θέτουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ στο $|z|<R$.

Τότε η f είναι ολόμορφη στο $\{z : |z|<R\}$ και μάλιστα
$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Πόρισμα: 1) Η f όπως προηγουμένως είναι C^{∞} στο $\{z : |z|<R\}$.

2) $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, ..., $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

3) Αν μια συνάρτηση f έχει δύο αναπτύγματα σε δυναμοσειρές με κέντρο 0
$f(z) = \sum \beta_n z^n$ στο $|z|<R_1$ $(R_1>0)$
$f(z) = \sum \gamma_n z^n$ στο $|z|<R_2$ $(R_2>0)$.
Τότε $\beta_n = \gamma_n$ γιατί $\beta_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\gamma_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ:

$$\lim_{w \to z} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n z^{n-1} \right| = 0$$

Έστω $R' < R$ και $|z| < R'$

Αρκεί να δείξω ότι $\left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n z^{n-1} \right| \leq C|w-z|$, $C<\infty$

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{1}{w-z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (w^n - z^n) = \frac{1}{\cancel{w-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cancel{(w-z)} \left[w^{n-1} + w^{n-2} z + \dots + z^{n-1} \right]$$

Και

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left\{ (w^{n-1} - z^{n-1}) + z(w^{n-2} - z^{n-2}) + \dots + z^{n-2}(w-z) \right\} =$$

$$= (w-z) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left\{ [w^{n-2} + w^{n-3} z + \dots + z^{n-2}] + z[w^{n-3} + w^{n-4} z + \dots + z^{n-3}] + \dots + z^{n-2} \right\} \quad (1)$$

Βάζοντας απόλυτες τιμές έχουμε:

(Το n^2 βγήκε επειδή έχω το πολύ n παρενθέσεις που έχουν το πολύ n προσθετέους. Το R' γιατί εάν το w είναι κοντά στο z, τότε $|w| < R'$)

$$(1) \leq |w-z| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot n^2 (R')^{n-2}}$$

$\downarrow$

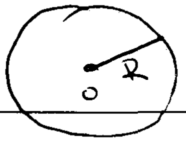
η σειρά αυτή συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot n^2 (R')^n$ συγκλίνει

Έχουμε:

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n| \cdot n^3}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}} = R \quad \text{(ίδια ακτίνα σύγκλισης)}$$

Κι επειδή $|R'| < R$ η σειρά συγκλίνει σε κάποιο $C \in \mathbb{R}$.

Οπότε βγάζουμε: $(1) \leq |w-z| \cdot C$ όπως θέλαμε



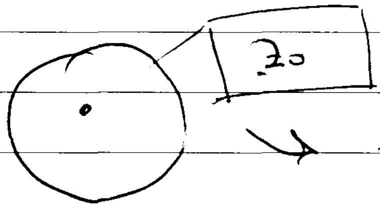
Άσκηση: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ακτίνα σύγκλισης $R \in [0,\infty)$

Θέτω $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ (ορίζεται μερικό ως πολυώνυμο)

- Αν $|z|<R \to S_N(z)$ συγκλίνει
- Αν $|z_0|>R$ ξέρουμε ότι η $S_N(z_0)$ δεν συγκλίνει $\forall N=0,1,2,\dots$

Θα δείξουμε μάλιστα ότι δεν είναι φραγμένη, άρα ότι $\exists$ υπακολουθία $a_{n_k} \nearrow \infty$ ώστε $S_{N_k}(z_0) \to +\infty$

Ωστόσο μπορεί να υπάρχει στην υπακολουθία $S_{N_k}(z_0) \to \xi \in \mathbb{C}$



K.

→ Αν $S_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(z)$ ομοιόμορφα στο K. (ΥΠΕΡΣΥΓΚΛΙΣΗ)

Έχω μια υπακολουθία που υπερσυγκλίνει ξ σε ένα ολόκληρο ανοιχτό σύνολο έξω απ' την ακτίνα σύγκλισης

ΛΥΣΗ: Έστω $|S_N(z_0)|<M \quad \forall N\in\mathbb{N}$.

Θα καταλήξω σε άτοπο.

$$|a_n z_0^n| = |S_n(z_0)-S_{n-1}(z_0)| \le |S_n(z_0)|+|S_{n-1}(z_0)| < 2M$$

Από λήμμα Abel $R \ge |z_0|$. Άτοπο γιατί είχαμε $|z_0|>R$

- Στην περιφέρεια → δεν υπάρχει πάντα υπακολουθία $\to \infty$.
  $S_n(z)$ δεν είναι υποχρεωτικά στο ∞

π.χ. για $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$