ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι

κατά τό χειμερινό ἑξάμηνο 2007-2008.

Οἱ σημειώσεις κρατήθηκαν ἀπό τή φοιτήτρια Γιώτα Χριστοδούλου σύμφωνα μέ τίς παραδόσεις τά γραπτά τοῦ Β. Νεστορίδη.

Ahlfors "Introduction to complex analysis"

Διατάξεις στους μιγαδικούς γίνονται πολλές (λεξικές ή άλλες) αλλά καμία δεν είναι συμβατή με τις πράξεις ώστε να γίνουν διατεταγμένο σώμα.

→ Λέμε ότι το $\mathbb{C}$ είναι πλήρες σαν μ.χ. ως προς την συνήθη απόσταση.

$$(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

$$(z-w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\bar{w})$$

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

↳ το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών 2 διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των πλευρών.

Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ με $|\alpha| < 1$ και

$w(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ με $z \neq \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$. Ν.Δ.Ο.

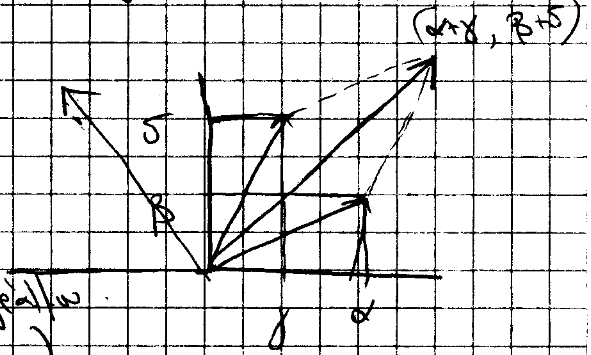
$|w(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$

$|w(z)| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

$|w(z)| > 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

Η αυτή του μετασχηματισμού → μοναδιαίος δίσκος παραμένει

$\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(\alpha,\beta) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \equiv \{\alpha+i\beta : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$



ΙΣΟΤΗΤΑ: $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta)$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

ΠΡΑΞΕΙΣ: $(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta)$

↳ κανόνας παραλληλογράμμου.

$(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta) = (\alpha\gamma-\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma)$

↳ Γεωμετρικά → γινόμενο των μηκών & άθροισμα των γωνιών

$\mathbb{C}$ → σώμα με τις ιδιότητές του

(+) Αντιμ. Προσ. $\exists!$ 0, $-\alpha$

($\cdot$) Αντιμ. Προσ. $\exists$ 1, $\exists\, \alpha^{-1}\ \forall\, \alpha\neq 0$.

→ Επιμ.

Αντίστροφος: $z^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}, \frac{-b}{\alpha^2+b^2}\right)$.

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

Δεν ισχύει $|z|^2 = z^2$ όπως στους πραγματικούς καθώς υπεισέρχεται η έννοια της διάταξης.

$i = (0,1)$

$i^2 = (-1,0)$

Αν $\alpha\in\mathbb{R} \to (\alpha,0) \equiv \alpha+0i \in\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ εμβαπτίζεται ισομορφικά στο $\mathbb{C}$)

Αν $z\in\mathbb{C}$, $z = \alpha+bi$

$\mathrm{Re}(z)=\alpha$

$\mathrm{Im}(z)=b$

$|z| = \sqrt{\alpha^2+b^2}$

$\bar z = \alpha - bi$

Η απεικόνιση: $z\to\bar z$ ανάκλαση ως προς τον xx'

$\overline{z+w} = \bar z + \bar w$

$\overline{zw} = \bar z\cdot\bar w$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar z}{\bar w}$

$\bar{\bar z} = z$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar z}{2}$

$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar z}{2i}$

$z\bar z = |z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$ ③

Αν $z, w \in \mathbb{C}$ τότε (α) $-|z| \le Re(z) \le |z|$ $\left(|Re(z)| \le |z| \right)$

(β) $-|z| \le Im\, z \le |z|$ $\left(|Im(z)| \le |z| \right)$.

① $z\bar{z} = |z|^2$

② $|zw| = |z|\cdot|w|$

③ $|z+w| \le |z| + |w|$

④ $\big||z| - |w|\big| \le |z-w|$

⑤ $|z| \le |Re(z)| + |Im\, z|$

③ $\Rightarrow |z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2$

$\cancel{|z|^2} + \cancel{|w|^2} + 2Re(z\bar{w}) \le \cancel{|z|^2} + \cancel{|w|^2} + 2|z||w|$

$Re(z\bar{w}) \le |z||w| = |z\bar{w}|$ → το οποίο ισχύει λόγω του (α)

④ $\Leftrightarrow$ $|z| - |w| \le |z-w|$ και $|w| - |z| \le |z-w|$ | Δείχνω $|z| = |(z-w)+w| \le |z-w| + |w|$

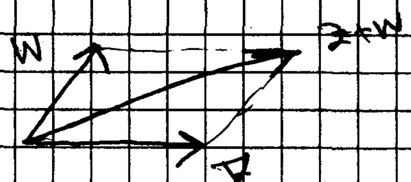
$|w| = |(w-z)+z| \le |w-z| + |z| = |z-w| + |z|$

⑤ $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le |x| + |y|$

$x^2 + y^2 \le (|x|+|y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y|$

(ή) $|z| = |x+iy| \le |x| + |iy| = |x| + |y|$

[ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ]



Ισότητα όταν: $w = \lambda z$, $\lambda > 0$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{N} |z_i|$$

Η ισότητα ισχύει όταν όλοι οι z_i είναι στην ίδια ημιευθεία με αρχή το $(0,0)$ δηλ. αν $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ ώστε $z_i = \lambda_i \alpha$, $\lambda_i \geq 0$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ Cauchy-Schwartz

Αν $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

Αν $z, w \in \mathbb{C}$. Έχουμε:

$$|z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \dots + z_n\bar{w}_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}\,\sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$$

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n| \leq$$

Γιατί $|z_1 w_1 + \dots + z_n w_n| \leq |z_1||w_1| + \dots + |z_n||w_n| \leq$

$$\leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}\,\sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$$

$|z_i|, |w_i| \in \mathbb{R}$ σαν πραγματικοί αριθμοί

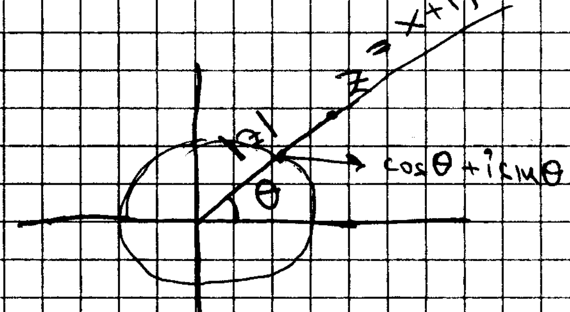
Άλλη απόδειξη $g(\lambda) = u + \lambda v$

$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle v,v\rangle\lambda^2 + 2\langle u,v\rangle\lambda + \langle u,u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|v\|^2\lambda^2 + 2\langle u,v\rangle\lambda + \|u\|^2 \geq 0$

Το οποίο ισχύει $\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$

$z \neq 0 \quad (z = x+yi,\ x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \neq 0)$



Αν ξέρω το $|z|$ και την θ.

$x = |z|\cos\theta$
$y = |z|\sin\theta$

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{μέτρο } 1}$$

$e^{i\theta}$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$

$w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$zw = |zw|(\cos s + i\sin s)$, $s \in \mathbb{R}$

$$|z||w|(\cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi\sin\theta - \sin\theta\sin\varphi) =$$
$$= (i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta) + \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)|z||w|$$
$$= (i\sin(\theta+\varphi) + \cos(\theta+\varphi))|z||w|$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $z \neq 0$.

Arg z ονομάζεται η οποιαδήποτε πρωταρχική γωνία του διανύσματος

$Re(z) = |z|\cdot\cos\theta$

$Im(z) = |z|\cdot\sin\theta$

Προφανώς αν θ_0 είναι μία κατάλληλη γωνία τότε το σύνολο των κατάλληλων γωνιών είναι $\theta_0 + 2\kappa\pi$ $\forall\, \kappa \in \mathbb{Z}$.

(Πολλές φορές με Arg z εννοούμε το σύνολο των κατάλληλων γωνιών.)

Άρα $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i\sin \operatorname{Arg} z)$

Αν θ η γωνία του w το $\frac{1}{w}$ έχει γωνία $-\theta$.

w^n, $n\theta$

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$|z| = |w|$

$\varphi = 2\kappa\pi + \theta$

$z^n = 1$

$n\theta = 2\kappa\pi \Rightarrow \theta = \frac{\kappa}{n}\cdot 2\pi$

Αν $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $\theta_1 - \theta_2 = 2\lambda\pi$ τότε z ίσα

$$\to \frac{\alpha_1}{n}\cdot\cancel{2\pi} - \frac{\alpha_2}{n}\cdot\cancel{2\pi} = k\,\cancel{2\pi} \Rightarrow \frac{\alpha_1-\alpha_2}{n} = k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$1 = \rho^0,\ \rho^1,\ \rho^2,\ \ldots,\ \rho^{n-1}$$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ | 09 | 10 | 07 | Μάθημα 3 (7)

Αν $n \in \mathbb{N}$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k=0,\dots,n-1$

Ασκήσεις

① $\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k = ;$

② $\lambda \in \mathbb{Z}$ ~~και~~ τις n-οστές ρίζες της μονάδας στην λ. Τότε

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k^{\lambda} = ;$$

Έστω η εξίσωση: $z^n = w$

Αν $w = 0 \Rightarrow z = 0$

Αν $w \neq 0$ ~~και~~ z_1, z_2 δύο λύσεις δεν έπεται ότι z_1, z_2 είναι λύση

διότι $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 1$

Αν $w \neq 0$, $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta = \operatorname{Arg} w$

$$z = |w|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) \quad k=0,\dots,n-1$$

Άλλος τρόπος: $\left(\begin{array}{ll} w \to \theta + 2\pi & n\varphi = \theta + 2k\pi \\ z \to \varphi & \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{array} \right)$

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$$

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

Άσκηση:

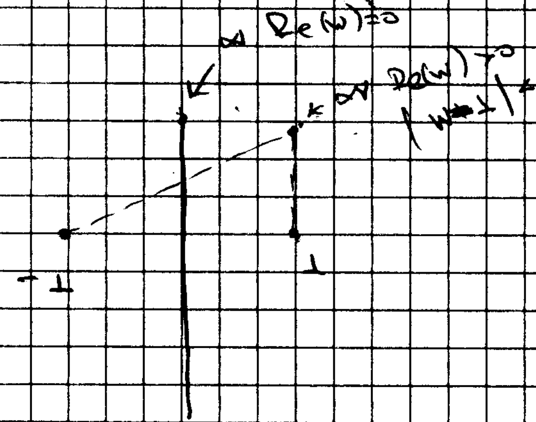
Έστω $w = \dfrac{1+z}{1-z}$

Αν $|z| < 1 \Rightarrow Re(w) > 0$

αν $|z| = 1 \Rightarrow Re(w) = 0$ ($z \neq 1$)

$|z| > 1 \Rightarrow Re(w) < 0$

(ανοιχτός κυκλικός δίσκος → ημιεπίπεδο
περιφέρεια → σε ευθεία
$\mathbb{R}^2 \setminus$ ανοιχτός μοναδιαίος → ημιεπίπεδο)



Αν $|z| = 1$

$z = \dfrac{w-1}{w+1}$

$|z| = \dfrac{|w-1|}{|w+1|}$

$wz + z = w - 1$

$zw - w = -1 - z$

$w(1-z) = 1+z$

$w = \dfrac{1+z}{1-z}$

Λύση: $2\,Re\,w = w + \bar{w} = \dfrac{1+z}{1-z} + \dfrac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})} =$

$= \dfrac{1+\cancel{z}-\cancel{\bar{z}}-|z|^2+1+\cancel{\bar{z}}-\cancel{z}-|z|^2}{|1-z|^2} = \dfrac{2(1-|z|^2)}{|1-z|^2}$

$Re\,w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$. Επομένως $Re\,w = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$

$Re\,w > 0 \Leftrightarrow 1-|z|^2 > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$

$Re\,w < 0 \Leftrightarrow |z| > 1$

Έστω $z \in \mathbb{C}$

$e^z = e^{Re\,z}(\cos[Im\,z] + i\sin[Im\,z])$

Δηλ. αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$|e^z| = |e^x| = e^x > 0 \Rightarrow |e^z| \neq 0$

(9)

1) $e^{z+2\pi i} = e^{z}$ αφού $e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{x}(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)) = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{z}$

εκθετική με περίοδο $2\pi i$

2) $e^{z} = e^{w}$ (=)

Προφανώς αν $w = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε $e^{z} = e^{w}$

Επομένως $e^{z} = e^{w} \Leftrightarrow z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Αν $|e^{z}| = |e^{w}|$, $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

Άρα $\boxed{x_1 = x_2}$

Έχουμε τότε: $\cancel{e^{x_1}} \cdot e^{iy_1} \overset{x_1=x_2}{=} \cancel{e^{x_2}} \cdot e^{iy_2} \Rightarrow e^{iy_1} = e^{iy_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y_1 = \cos y_2$ και $\sin y_1 = \sin y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = 2k\pi$

$\log$

$e^{z} = w \neq 0$, $w = |w|(\cos \mathrm{Arg}w + i\sin \mathrm{Arg}w) =$

$= |w| \cdot e^{i\mathrm{Arg}w} = e^{\ln|w|} \cdot e^{i\mathrm{Arg}w} =$

$= e^{\ln|w| + i\mathrm{Arg}w}$

$\Rightarrow z = \ln|w| + i\mathrm{Arg}w + i2k\pi = \ln|w| + i(\underbrace{\mathrm{Arg}w + 2k\pi}_{\mathrm{Arg}w})$

$z = \log w = \ln|w| + i(\mathrm{Arg}w + 2k\pi)$

$\log 1 = \cancel{\ln 1}^{0} + i \cdot 2k\pi i$ = $2k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$

$\log i = i(\pi/2 + 2k\pi)$

$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

$z_1 z_2 \neq 0$ $\log(z_1 z_2)$

Αν $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Ορίζουμε $e^{i\theta}$, αν $\theta \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Επομένως ~~τα~~ $\cos\left(\frac{2\pi\kappa}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\kappa\right) = e^{i\frac{2\kappa\pi}{n}}$

Αν $e^{i\frac{2\pi}{n}} = \rho$

$e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot 2} = \rho^2$

$e^{i\frac{2\pi}{n}\kappa} = \rho^\kappa$

- $|e^A| = e^{\operatorname{Re} A}$
- $e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i} = e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

$= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) =$

$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$

$= e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

- $e^0 = 1$
- $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

$\downarrow$

$e^{-z}\cdot e^{z} = 1 = e^0 \Rightarrow$

$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

$$\boxed{\bullet\ e^{(\bar z)} = \overline{(e^z)}}$$

Άσκηση: $|z| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{z-1}{z+1}}\right| < 1$

$z \neq -1$

Αν $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $e^{(\bar z)} = e^{(x-iy)} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) =$

$= e^x(\cos y - i\sin y) =$

$= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = \overline{(e^z)}$

Λύση άσκησης

$\left|e^{\frac{z-1}{z+1}}\right| = e^{\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}} = e^{\frac{|z|^2-1}{|1+z|^2}}$ από προηγ. άσκηση

αν $|z| < 1 \Rightarrow e^{\frac{|z|^2-1}{|z+1|^2}} < 1$

αν $|z| = 1 \Rightarrow e^0 = 1$, $z \neq -1$

αν $|z| > 1 \Rightarrow e^{\frac{|z|^2-1}{|z+1|^2}} > 1$

(Στους μιγαδικούς το $\frac{1}{0} \to \infty$, έχουμε μόνο ένα άπειρο)