Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης

Υποδείξεις

1ο Κεφάλαιο: Σύνολα

1. (α) $1 \subseteq \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(β) $\{1,2\} \subseteq \{1,3,5,2\}$, αληθής.
(γ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \subseteq \{1,3,5\}$, ψευδής.
(δ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \in \mathbb{N}$, ψευδής.
(ε) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$, ψευδής.
(στ) $-3 \in \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$, ψευδής.
(ζ) $\{1\} \in \{1,2,3\}$, ψευδής.
(η) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$, αληθής.
(ϑ) $1 \subseteq \{1,2,3\}$, ψευδής.
(ι) $\{1,2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$, ψευδής.
(ια) $\{\{2\}\} \in \{1,\{2\}\}$, ψευδής.
(ιβ) $\{\{2\}\} \subseteq \{1,\{2\}\}$, αληθής.
(ιγ) $\emptyset \subseteq \emptyset$, αληθής.
(ιδ) $\emptyset \in \emptyset$, ψευδής.
(ιε) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, αληθής.
(ιστ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, αληθής.

2. (α) $A \cup \{A\} = \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.
(β) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
(γ) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

3. $A = B$, $C = D$.

5. $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{2,3\}$, $B \setminus A = \{5,6,7\}$ και $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2,3,5,6,7\}$.

6. $V \setminus W = \{a, X\}$ και $W \setminus V = \{1, \emptyset, \{\alpha\}\}$.

7. $A \setminus \{a\} = \{b, \{a,c\}, \emptyset\}$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \setminus \{a,c\} = \{b,\{a,c\},\emptyset\}$, $A \setminus \{\{a,c\}\} = \{a,b,\emptyset\}$, $A \triangle \{a,c\} = \{b,\{a,c\},c,\emptyset\}$, $\{a\} \setminus A = \emptyset$.

10. Δείξτε ότι και τα δύο μέλη είναι ίσα με

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C).$$

11. (α) $(A \triangle B) \triangle A = (B \triangle A) \triangle A = B \triangle (A \triangle A) = B \triangle \emptyset = B$.
(β) $(A \cap C) \triangle (B \cap C) = [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \setminus [(A \cap C) \cap (B \cap C)] = [(A \cup B) \cap C] \setminus [(A \cap B) \cap C] = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cap C = (A \triangle B) \cap C$.

12. (α) Αν τα σύνολα A, B και C ικανοποιούν την $A \triangle B = A \triangle C$, τότε $(A \triangle B) \triangle A = (A \triangle C) \triangle A$, δηλαδή (από την προηγούμενη άσκηση), $B = C$.

(β) Αν A και B είναι δύο σύνολα, $A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle B) \triangle A = B$, δηλαδή υπάρχει σύνολο X, το $X = A \triangle B$, ώστε $A \triangle X = B$. Για τη μοναδικότητα, αν $A \triangle X = B$ τότε $X = (A \triangle X) \triangle A = B \triangle A$, δηλαδή $X = B \triangle A = A \triangle B$.

13. Αν $a \in \bigcup X$ τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $a \in X$. Αφού $X = X_1 \cup X_2$, έχουμε είτε $x \in X_1$ ή $x \in X_2$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x \in X_1$ και $a \in x$, άρα $a \in \bigcup X_1$. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $x \in X_2$ και $a \in x$, άρα $a \in \bigcup X_2$. Σε κάθε περίπτωση, $a \in (\bigcup X_1) \cup (\bigcup X_2)$. Συνεπώς,

$$\bigcup X \subseteq \left(\bigcup X_1\right) \cup \left(\bigcup X_2\right).$$

Ο άλλος εγκλεισμός αποδεικνύεται ανάλογα.

14. (α) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(β) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(γ) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(δ) $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B)$, αληθής.
(ε) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, αληθής.
(στ) $\{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, ψευδής.
(ζ) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, αληθής.

16. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

16A. (α) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$: Αν $X \in \mathcal{P}(A)$ τότε $X \subseteq A$, άρα $X \subseteq A \cup B$, άρα $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Όμοια, $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Συνεπώς, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

(β) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$: Αν $A \subseteq B$ τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, άρα

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B),$$

με την τελευταία ισότητα διότι $A \cup B = B$. Όμοια, αν $B \subseteq A$ τότε $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$, άρα

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup B),$$

με την τελευταία ισότητα διότι $A \cup B = A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \setminus B \neq \emptyset$ και $B \setminus A \neq \emptyset$ και δείχνουμε ότι $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Υπάρχουν $x \in A \setminus B$ και $y \in B \setminus A$. Τότε, $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, άρα $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Όμως, το $\{x, y\}$ δεν είναι υποσύνολο του A ούτε του B, άρα $\{x, y\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(γ) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$: Έστω $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$. Τότε, $X \subseteq A \setminus B$. Άρα, $X \subseteq A$ και το X δεν περιέχει στοιχεία του B.

Αν το X είναι μη κενό, τότε δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του B, και αφού $X \subseteq A$ θα έχουμε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Σε κάθε περίπτωση, $X \in (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

17. Αφού $A \subseteq X$, έχουμε $A \in \mathcal{P}(X) \subseteq X \cup \mathcal{P}(X) = Z$ άρα $A \in Z$. Επίσης, $X \subseteq Z$ και $A \subseteq X$, άρα $A \subseteq Z$.

18. Δείχνουμε με επαγωγή την πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S. Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1}. Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T, δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k. Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

19. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ για κάποιο σύνολο X και καταλήγουμε σε αντίφαση: Ορίζουμε $A = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \notin Y\}$. Τότε, $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, άρα $A \subseteq X$, άρα $A \in \mathcal{P}(X)$.

1. Αν $A \in A$ τότε $A \notin A$ από τον ορισμό του A, άτοπο.

2. Αν $A \notin A$ τότε $A \in A$, πάλι από τον ορισμό του A, άτοπο.

2ο Κεφάλαιο: Σχέσεις

1. Από τον ορισμό θα έπρεπε να έπεται το εξής: αν $(x,y)=(a,b)$ τότε $x=a$ και $y=b$. Από τον προτεινόμενο ορισμό δεν εξασφαλίζεται κάτι τέτοιο. Για παράδειγμα: αν $x=\{1\}$, $y=2$, τότε $(x,y)=\{\{1\},\{2\}\}$. Όμως, αν $a=\{2\}$, $b=1$, τότε $(a,b)=\{\{2\},\{1\}\}=\{\{1\},\{2\}\}$. Θα έπρεπε λοιπόν να ισχύει $x=\{1\}=\{2\}=a$ και $y=2=1=b$, δηλαδή $2=1$.

2. (α) Έστω $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$. Τότε $x\in A\setminus B$ και $y\in C$. Δηλαδή, $x\in A$, $x\notin B$ και $y\in C$. Από τις $x\in A$, $y\in C$ βλέπουμε ότι $(x,y)\in A\times C$ ενώ από την $x\notin B$ βλέπουμε ότι $(x,y)\notin B\times C$. Συνεπώς, $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\setminus B)\times C\subseteq(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Αντίστροφα, έστω $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$. Τότε, $(x,y)\in A\times C$ και $(x,y)\notin B\times C$. Αυτό σημαίνει ότι $x\in A$, $y\in C$ και «είτε $x\notin B$ ή $y\notin C$». Αφού όμως $y\in C$, αναγκαστικά $x\notin B$. Άρα, $x\in A\setminus B$ και $y\in C$, δηλαδή $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\times C)\setminus(B\times C)\subseteq(A\setminus B)\times C$, και έπεται η ισότητα:

$$(A\times C)\setminus(B\times C)=(A\setminus B)\times C.$$

(β) Για τη δεύτερη ισότητα, πρώτα γράφουμε

$$(A\times C)\triangle(B\times C)=[(A\times C)\setminus(B\times C)]\cup[(B\times C)\setminus(A\times C)]$$

και, χρησιμοποιώντας το (α) βλέπουμε ότι αυτό το σύνολο είναι ίσο με το

$$[(A\setminus B)\times C]\cup[(B\setminus A)\times C].$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα της Άσκησης 2, βλέπουμε ότι αυτό το σύνολο ισούται με το

$$[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\times C=(A\triangle B)\times C.$$

3. Μονοσύνολα: $A=\{a\}$, $B=\{2\}$, $C=\{c\}$, $D=\{4\}$. Το $(A\times B)\cup(C\times D)$ έχει δύο στοιχεία ενώ το $(A\cup C)\times(B\cup D)$ τέσσερα.

4. Παρατηρήστε πρώτα ότι $\boldsymbol{\sigma}\subset\boldsymbol{\rho}$ διότι: αν $a^2\mid b$ τότε και $a\mid b$. Συνεπώς,

- $(a,b)\in\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a\mid b$.
- $(a,b)\in\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a^2\mid b$.
- $(a,b)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a\mid b$ αλλά δεν ισχύει $a^2\mid b$.

- $\boldsymbol{\sigma} \setminus \boldsymbol{\rho} = \emptyset$.

5. Γράφουμε μόνο τις απαντήσεις (και, για ορισμένες από αυτές, σύντομη επεξήγηση):

1. $x < y$. Δεν είναι ανακλαστική ούτε συμμετρική, είναι μεταβατική.

2. $x \geq y$. Δεν είναι συμμετρική, είναι ανακλαστική και μεταβατική.

3. $|x-y| \leq 1$. Είναι ανακλαστική και συμμετρική, δεν είναι μεταβατική: $|2-1| \leq 1$ και $|3-2| \leq 1$ αλλά $|3-1| > 1$.

4. $|x-y| \leq 0$. Είναι η σχέση ισότητας: $|x-y| \leq 0$ αν και μόνο αν $x = y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

5. $x - y \in \mathbb{Q}$. Είναι σχέση ισοδυναμίας: ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

6. $x - y \notin \mathbb{Q}$. Είναι συμμετρική, δεν είναι όμως ανακλαστική αφού $0 \notin \mathbb{Q}$, ούτε μεταβατική: $2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Q}$, αλλά $2 - 1 \in \mathbb{Q}$.

6. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(x, x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x, x) \in \boldsymbol{\sigma}$. Συνεπώς, $(x, x) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma} \subseteq \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Άρα, οι σχέσεις $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστικές.

7. Έστω $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Τότε, είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ οπότε $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$ ή $(x, y) \in \boldsymbol{\sigma}$ οπότε $(y, x) \in \boldsymbol{\sigma}$ (χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι οι δύο σχέσεις είναι συμμετρικές). Σε κάθε περίπτωση, $(y, x) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Άρα, η $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική.

Εντελώς ανάλογα, έστω $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$. Τότε, $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ οπότε $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x, y) \in \boldsymbol{\sigma}$ οπότε $(y, x) \in \boldsymbol{\sigma}$ (χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι οι δύο σχέσεις είναι συμμετρικές). Άρα, $(y, x) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$. Δηλαδή, η $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι κι αυτή συμμετρική.

8. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας:

1. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστική: $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(m, n)$ διότι $m + n = m + n$.

2. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: αν $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s)$, τότε $m + s = r + n$, άρα $r + n = m + s$ κι αυτό μας δίνει $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(m, n)$.

3. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική: αν $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s)$ και $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(u, v)$, τότε $m + s = r + n$ και $r + v = u + s$, οπότε $m + s + r + v = r + n + u + s$, οπότε $m + v = n + u = u + n$, δηλαδή $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(u, v)$.

Συνεπώς, η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία του $\mathbb{Z}$. Για παράδειγμα,

$$E_{-2} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}\} = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), \ldots\}$$

και

$$E_0 = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots\}.$$

9. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας:

1. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστική: $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$ διότι $m\cdot n = m\cdot n$.
2. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$, τότε $m\cdot s = r\cdot n$, άρα $r\cdot n = m\cdot s$ κι αυτό μας δίνει $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$.
3. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$ και $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$, τότε $m\cdot s = r\cdot n$ και $r\cdot v = u\cdot s$, οπότε $m\cdot s\cdot r\cdot v = r\cdot n\cdot u\cdot s$, οπότε $m\cdot v = n\cdot u = u\cdot n$ (η διαίρεση με s επιτρέπεται και (i) αν $r\neq 0$ διαιρούμε και με r, ενώ (ii) αν $r=0$ τότε $m=u=0$ οπότε πάλι $m\cdot v = u\cdot n$). Δηλαδή, $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$.

Συνεπώς, η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία του $\mathbb{Q}$. Για παράδειγμα,

$$E_{-2} = \{(-2n,n) : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\} = \{(4,-2),(2,-1),(-2,1),(-4,2)\dots\},$$

$$E_{2/3} = \{(2n,3n) : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\} = \{(-4,-6),(-2,-3),(2,3),(4,6)\dots\}$$

και

$$E_0 = \{(0,n) : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\} = \{(0,-1),(0,1),(0,2),\dots\}.$$

10. Το επιχείρημα δεν είναι σωστό. Ξεκινάμε με τυχόν a και θέλουμε να δείξουμε ότι $a\sim a$. Το επιχείρημα προϋποθέτει ότι υπάρχει b ώστε $a\sim b$, μπορεί όμως το a να μην «σχετίζεται» με κανένα στοιχείο του συνόλου.

Για παράδειγμα, η σχέση $R=\{(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$ στο σύνολο $A=\{a,b,c\}$ είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά δεν είναι ανακλαστική αφού $(a,a)\notin R$.

11. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι ανακλαστική. Έστω $x\in X$. Από την ιδιότητα (β) της $\sim$, υπάρχει $y\in X$ ώστε $x\sim y$. Η $\sim$ είναι συμμετρική, άρα $y\sim x$. Η $\sim$ είναι μεταβατική, οπότε από τις $x\sim y$ και $y\sim x$ έπεται ότι $x\sim x$.

12. Έχουμε $(x,y)\in\equiv_4\cap\equiv_6$ αν και μόνο αν ο $x-y$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των 4 και 6. Δηλαδή, αν και μόνο αν ο $x-y$ είναι πολλαπλάσιο του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου των 4 και 6, δηλαδή του 12. Άρα, $\equiv_4\cap\equiv_6=\equiv_{12}$.

13. Υπάρχουν τόσες διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$ όσες είναι και οι διαμερίσεις του A. Υπάρχουν:

1. Μία διαμέριση σε τέσσερα μονοσύνολα.
2. Τρεις διαμερίσεις σε δύο δισύνολα.
3. Τέσσερις διαμερίσεις σε μονοσύνολο και τρισύνολο.
4. Έξι διαμερίσεις σε ένα δισύνολο και δύο μονοσύνολα.

5. Μία διαμέριση που αποτελείται μόνο από το A.

Συνολικά, δεκαπέντε διαφορετικές διαμερίσεις.

14. Έστω $E_x^1 \in \Delta_1$ η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ ως προς την $\boldsymbol{\rho_1}$. Αν $y \in E_x^1$ τότε $(y, x) \in \boldsymbol{\rho_1} \subseteq \boldsymbol{\rho_2}$, άρα $y \in E_x^2$, όπου E_x^2 η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ ως προς την $\boldsymbol{\rho_2}$. Δηλαδή, κάθε στοιχείο της Δ_1 περιέχεται σε κάποιο στοιχείο της Δ_2.

15. Εύκολα ελέγχουμε ότι η σ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, άρα είναι σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε τώρα τη σ' με $x\sigma' y$ αν και μόνο αν οι x και y έχουν τουλάχιστον έναν κοινό γονέα. Παρατηρούμε ότι η σχέση σ' είναι ανακλαστική και συμμετρική, αλλά δεν είναι μεταβατική, γιατί μπορεί οί x και y να έχουν τον ίδιο πατέρα, αλλά διαφορετική μητέρα και οι y και z να έχουν την ίδια μητέρα, αλλά διαφορετικό πατέρα, οπότε οι x και z δεν θα έχουν κανέναν κοινό γονέα.

16. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της διάταξης για την $\boldsymbol{\rho}^{-1}$:

1. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $x\boldsymbol{\rho}x$ άρα και $x\boldsymbol{\rho}^{-1}x$.

2. Έστω $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$ και $y\boldsymbol{\rho}^{-1}x$. Τότε, $y\boldsymbol{\rho}x$ και $x\boldsymbol{\rho}y$, άρα $x = y$.

3. Έστω $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$ και $y\boldsymbol{\rho}^{-1}z$. Τότε, $z\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}x$, άρα $z\boldsymbol{\rho}x$, απ΄ όπου παίρνουμε $x\boldsymbol{\rho}^{-1}z$.

17. Ναι, είναι: Έχουμε δει ότι η σχέση $\subseteq$ σε οποιοδήποτε σύνολο συνόλων είναι διάταξη. Παρατηρήστε επιπλέον ότι τα στοιχεία του A συγκρίνονται ανά δύο (περιέχονται το ένα στο άλλο).

18. Η $\boldsymbol{\rho}$ είναι διάταξη: Ισχύει $a \mid a$, για κάθε $a \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν $a \mid b$ και $b \mid a$ τότε $a = b$. Τέλος, αν $a \mid b$ και $b \mid c$ τότε $a \mid c$. Υπάρχουν όμως ζεύγη φυσικών, για παράδειγμα ο 3 και ο 5, που δεν συγκρίνονται. Άρα, η $\boldsymbol{\rho}$ δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}$.

19. Η σχέση $\boldsymbol{\rho}$ (του διαιρέτη) στο σύνολο $X = \{1, 2, 6, 30, 210\}$ είναι γνήσια διάταξη. Ο λόγος είναι ότι, τώρα, τα στοιχεία του X συγκρίνονται ανά δύο: αυτό προκύπτει εύκολα, αν παρατηρήσετε ότι $1 \mid 2$, $2 \mid 6$, $6 \mid 30$ και $30 \mid 210$.

20. Η R είναι διάταξη, αλλά γενικά δεν είναι ολική διάταξη: Αν $a, c \in A$ με $a \neq c$ και aR_1c και $b, d \in B$ με $b \neq d$ και dR_2b, τότε δεν ισχύει ούτε $(a, b)R(c, d)$ ούτε $(c, d)R(a, b)$. Για ένα πιο συγκεκτιμένο παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $A = B = \mathbb{R}$ με R_1, R_2 τη συνήθη διάταξη $\leq$, οπότε τα ζεύγη $(1, 5)$, $(3, 2)$ δεν συγκρίνονται μέσω της R.

21. Παρόμοια με την επόμενη.

22. Ελέγχουμε ότι η σχέση L είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική:

1. Για κάθε $(a, b) \in A \times B$ είναι $(a, b)L(a, b)$, αφού $a = a$ και bTb.
2. Έστω $(a, b)L(c, d)$ και $(c, d)L(a, b)$. Τότε aRc και cRa, άρα $a = c$, οπότε ισχύει και bTd και dTb, οπότε $b = d$. Συμπεραίνουμε ότι $(a, b) = (c, d)$.
3. Έστω ότι $(a, b)\ L\ (c, d)$ και $(c, d)\ L\ (x, y)$. Τότε, ισχύει $a\ R\ c$ και $c\ R\ x$, άρα $a\ R\ x$. Αν επιπλέον $a \neq x$, τότε $(a, b)\ L\ (x, y)$. Διαφορετικά, αν δηλαδή $a = x$, τότε αναγκαστικά $a = c = x$ άρα bTd και dTy άρα bTy, οπότε πάλι $(a, b)\ L\ (x, y)$.

Συμπεραίνουμε ότι η L είναι διάταξη. Για να διαπιστώσουμε ότι είναι ολική διάταξη, παρατηρούμε ότι, για οποιαδήποτε $(a, b), (c, d) \in A \times B$, είτε θα ισχύει aRc και $a \neq c$, οπότε άμεσα παίρνουμε $(a, b)L(c, d)$, είτε θα ισχύει cRa και $c \neq a$, οπότε $(c, d)L(a, b)$, είτε θα ισχύει $a = c$. Στην τελευταία περίπτωση, είτε θα ισχύει bTd, οπότε παίρνουμε $(a, b)L(c, d)$, είτε θα ισχύει dTb, οπότε $(c, d)L(a, b)$. Σε κάθε περίπτωση, βλέπουμε ότι τα (a, b) και (c, d) συγκρίνονται μέσω της L.