Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Σύνολα – Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

(α) $1 \in \{1, 2\}$
(β) $3 \in \{1, 5, 2, 3\}$
(γ) $3 \in \{1, 5, 2\}$
(δ) $\{1, 3\} \in \{1, 3, 5, 2\}$
(ε) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 2\}$
(στ) $2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$
(ζ) $\{1, 4, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 4, 3, 2\}$
(η) $\{a, d, b, d\} = \{a, b, d\}$
(ϑ) $\{a, b, d, d\} = \{a, b, a, d\}$
(ι) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 0\}$

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

(α) $1 \subseteq \{1, 2\}$
(β) $\{3, 1\} \subseteq \{1, 5, 2, 3\}$
(γ) $\{3\} \subseteq \{1, 5, 2\}$
(δ) $\{1, 3\} \in \{1, 3, 5, 2\}$
(ε) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 2\}$
(στ) $2 \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$
(ζ) $\{1, 4, 2, 3\} \subseteq \{2, 3, 1, 4, 3, 2\}$
(η) $\{a, d, b, d\} \subseteq \{a, b, a, d\}$
(ϑ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b > 2\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$
(ι) $\{b \in \mathbb{N} \mid b > 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$
(ια) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$
(ιβ) $\{2\} \in \{1, \{2\}\}$
(ιγ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$
(ιδ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

(α) $1 \subseteq \{1, 3, 5, 2\}$
(β) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3, 5, 2\}$
(γ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \subseteq \{1, 3, 5\}$
(δ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \in \mathbb{N}$
(ε) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$
(στ) $-3 \in \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$
(ζ) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$
(η) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
(ϑ) $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$
(ι) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$
(ια) $\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$
(ιβ) $\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$
(ιγ) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(ιδ) $\emptyset \in \emptyset$
(ιε) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(ιστ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

4. Προσδιορίστε τα παρακάτω σύνολα:
(α) $\{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 6\}$.
(β) $\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 6\}$.
(γ) $A \cup B$, όπου $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$ και $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -3\}$.
(δ) $C \cap D$, όπου $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3\}$ και $D = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 3\}$.

5. Προσδιορίστε τα παρακάτω σύνολα:
(α) $\{1, 2, \{4\}\} \cup \{2, 3, 6\}$.
(β) $\{1, \{2\}, 4\} \cap \{2, 3, 6\}$.
(γ) $A \cup B$, όπου $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 3\}$ και $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -3\}$.
(δ) $C \cap D$, όπου $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 3\}$ και $D = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 3\}$.
(ε) $A \cup \{A\}$, όπου $A = \{1, 2, 3\}$.
(στ) $\emptyset \cup \{\emptyset\}$.
(ζ) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$.

6. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα;
$A = \{-1, 1, 2\}$.
$B = \{-1, 2, 1, 2\}$.
$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 2 \text{ και } n \neq 0\}$.
$D = \{-2, 2\} \cup \{1, -1\}$.

7. Αποδείξτε ότι, αν A, B, C είναι σύνολα, τότε:
(α) $A \cup \emptyset = A$ και $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(β) $A \cup A = A$ και $A \cap A = A$.
(γ) $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$.
(δ) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

8. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Venn στις ακόλουθες περιπτώσεις:
(α) Έχουμε δύο σύνολα A και B που ικανοποιούν τις $A \cup B \subseteq B$ και $B \not\subseteq A$.
(β) Έχουμε τρία σύνολα A, B και C που ικανοποιούν τις $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ και $B \cap C \neq \emptyset$.

9. Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 5, 6, 7\}$. Βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ και $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

10. Αν $V = \{a, f, X\}$ και $W = \{1, f, \emptyset, \{\alpha\}\}$, βρείτε τα $V \setminus W$ και $W \setminus V$.

11. Αν $A = \{a, b, \{a, c\}, \emptyset\}$, βρείτε τα σύνολα:

$$A \setminus \{a\}, \quad A \setminus \emptyset, \quad A \setminus \{a, c\}, \quad A \setminus \{\{a, c\}\}, \quad A \triangle \{a, c\}, \quad \{a\} \setminus A.$$

12. Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις:
(α) $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F)$.
(β) $((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c$.

13. Έστω A και B δύο υποσύνολα του χώρου U. Δείξτε ότι $A \setminus B = A \cap B^c$ και, χρησιμοποιώντας αυτήν την ισότητα, δείξτε ότι, για κάθε $A, B, C \subseteq U$,
(α) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
(β) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

14. Αν $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και B, δείξτε ότι:
(α) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
(β) $A \triangle B = B \triangle A$.
Αν A είναι ένα σύνολο, βρείτε τα σύνολα $A \triangle A$ και $A \triangle \emptyset$.

15. Δείξτε ότι η συμμετρική διαφορά έχει την προσεταιριστική ιδιότητα

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

16. Αποδείξτε ότι:
(α) $(A \triangle B) \triangle A = B$.
(β) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

17. (α) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι: αν τα σύνολα A, B και C ικανοποιούν την $A \triangle B = A \triangle C$, τότε $B = C$.

(β) Δείξτε ότι: αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε υπάρχει μοναδικό σύνολο X ώστε $A \triangle X = B$ (η «εξίσωση» $A \triangle X = B$ έχει μοναδική λύση).

18. Βρείτε το δυναμοσύνολο του συνόλου $X = \{\alpha, \gamma, \omega\}$ και το δυναμοσύνολο του συνόλου $A = \{a, \{a, b\}\}$.

19. Έστω S το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{Z}$ στα οποία ανήκει το 0. Να βρεθούν τα $\bigcup S$ και $\bigcap S$.

20. Αν $X = X_1 \cup X_2$, δείξτε ότι

$$\bigcup X = \left(\bigcup X_1\right) \cup \left(\bigcup X_2\right).$$

21. Δίνονται τα σύνολα $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{a, \{a\}, b\}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

(α) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
(β) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$.
(γ) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$.
(δ) $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B)$.
(ε) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.
(στ) $\{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.
(ζ) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

22. Βρείτε τα $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

23. Αν A και B είναι δύο σύνολα, δείξτε ότι:

(α) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
(β) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.
(γ) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

24. Δίνονται: ένα σύνολο X και ένα υποσύνολο $A \subseteq X$. Αν $Z = X \cup \mathcal{P}(X)$, δείξτε ότι $A \subseteq Z$ και $A \in Z$.

25. Δίνεται ένα σύνολο A με n στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ του A;

26. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο X με την ιδιότητα $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. [*Υπόδειξη:* Θεωρώντας το σύνολο των υποσυνόλων Y του X για τα οποία $Y \notin Y$ θα οδηγηθείτε σε αντίφαση.]

27. Αν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα και $|X|$ είναι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X, δείξτε ότι

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Σχεδιάστε κατάλληλο διάγραμμα Venn.

28. Αν A, B και C είναι πεπερασμένα σύνολα και $|X|$ είναι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X, δείξτε ότι

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Σχεδιάστε κατάλληλο διάγραμμα Venn.

29. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, εξετάστε αν προκύπτει αληθής ή ψευδής πρόταση αν στη θέση του X βάλουμε καθένα από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$:

(α) $\{x \in X \mid x^3 = 5\} \neq \emptyset$.

(β) $\{x \in X \mid -1 \leq x \leq 1\} = \{1\}$.

(γ) $\{x \in X \mid 2 < x^2 < 5\} \setminus \{x \in X \mid x > 0\} = \{-2\}$.

(δ) $\{x \in X \mid 1 < x \leq 4\} = \{x \in X \mid x^2 = 4\} \cup \{3, 4\}$.

(ε) $\{x \in X \mid 4x^2 = 1\} \setminus \{x \in X \mid x < 0\} = \{x \in X \mid 5x^2 = 3\} \cup \{x \in S \mid 2x = 1\} \neq \emptyset$.

30. Η εξίσωση $x + y = z$ έχει πολλές λύσεις $x, y, z \in \mathbb{N}$. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ έχει κι αυτή λύσεις στο $\mathbb{N}$ (για παράδειγμα, $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$). Ορίζουμε

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{υπάρχουν } x, y, z \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x^n + y^n = z^n\}.$$

Πώς θα μπορούσατε να αποδείξετε ότι $F = \{1, 2\}$;