ΜΑΘΗΜΑ 11

14 Ισχύς Συνόλου

Παρακάτω θα θεωρήσουμε γνωστά τα αριθμοσύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$. Τον αυστηρό ορισμό τους θα τον συζητήσουμε αργότερα.

14.1 Ορισμός. Λέμε ότι δύο σύνολα A,B ***είναι ισοπληθικά*** ή ότι ***έχουν την ίδια ισχύ***, αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \to B$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$|A| = |B| \quad \text{ή} \quad A =_c B.$$

14.2 Πρόταση. *Ισχύουν τα επόμενα:*

(1) Για κάθε σύνολο A, είναι $|A| = |A|$.

(2) Αν A, B σύνολα με $|A| = |B|$, τότε $|B| = |A|$.

(3) Αν A,B, C σύνολα με $|A| = |B|$ και $|B| = |C|$, τότε $|A| = |C|$.

Απόδειξη. (1) Για κάθε σύνολο A, η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_A : A \to A$ που είναι 1-1 και επί.

(2) Αν υπάρχει $f : A \to B$ 1-1 και επί, τότε υπάρχει και η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$ που επίσης είναι 1-1 και επί.

(3) Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι 1-1 και επί, τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to C$ είναι 1-1 και επί. $\square$

Οι τρεις ιδιότητες της προηγούμενης πρότασης σημαίνουν ότι η σχέση της 'ισοπληθικότητας' είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Μοιάζει δηλ. με σχέση ισοδυναμίας, στην οικογένεια όλων των συνόλων.

14.3 Παραδείγματα. (1) Αν $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και $\mathbb{N}_o = \{0, 1, 2, \dots\}$, τότε

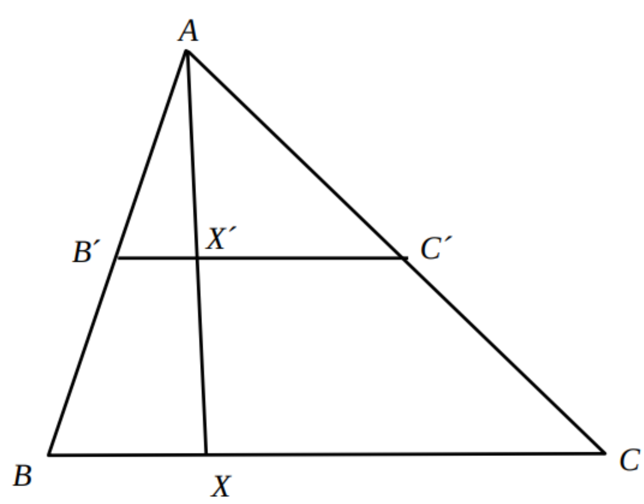
$$\mathbb{N} =_c \mathbb{N}_o$$

μέσω της
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_o : f(n) = n - 1.$$

(2) Αν $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, τότε
$$B =_c \mathbb{N}$$
μέσω της
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B : f(n) = n^2.$$

Παρατηρούμε ότι από τα δύο πρώτα παραδείγματα προκύπτει πως *ένα σύνολο μπορεί να είναι ισοπληθικό με ένα γνήσιο υποσύνολό του*.

(3) Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC όπως στο επόμενο σχήμα και το ευθύγραμμο τμήμα $B'C'$ που ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και AC. Από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μήκος του BC είναι διπλάσιο του μήκους του $B'C'$. Όμως τα BC και $B'C'$, σαν σημειοσύνολα, έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων:
$$BC =_c B'C'.$$
Βρίσκουμε μια απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ τους, αν κάθε σημείο X του BC το αντιστοιχήσουμε στην τομή του AX με το $B'C'$.



(4) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τα διαστήματα (a, b) και $(0, 1)$ είναι ισοπληθικά, δηλ.
$$(a, b) =_c (0, 1).$$

Πράγματι, η συνάρτηση

$$f : (a, b) \longrightarrow (0, 1) : f(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

είναι 1-1 και επί. Επειδή το ίδιο συμβαίνει και για κάθε άλλο διάστημα (c, d) με $c < d$, λόγω της μεταβατικότητας της σχέσης, παίρνουμε

$$(a, b) =_c (c, d)$$

για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, με $a < b$ και $c < d$.

(5) Η συνάρτηση της εφαπτομένης

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι 1-1 και επί μεταξύ των ανωτέρω συνόλων, άρα

$$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =_c \mathbb{R}$$

κι επειδή όλα τα ανοικτά διαστήματα είναι ισοπληθικά μεταξύ τους,

$$(a, b) =_c \mathbb{R},$$

γιά κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(6) Η εκθετική συνάρτηση

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) : \exp(x) = e^x$$

είναι 1-1 και επί, άρα

$$\mathbb{R} =_c (0, +\infty).$$

Το 1-1 και επί της μεταφοράς κατά $a \in \mathbb{R}$

$$f_a : (0, +\infty) \longrightarrow (a, +\infty) : f_a(x) = x + a$$

μας δείχνει ότι όλοι οι ημιάξονες $(a, +\infty)$ είναι ισοπληθικοί μεταξύ τους και ο πολλαπλασιασμός με -1 ότι $(0, +\infty) =_c (-\infty, 0)$. Επομένως, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, a) =_c \mathbb{R} =_c (b, +\infty)$$

(7) Θα δείξουμε τώρα ότι επισυνάπτοντας σε ένα ανοικτό διάστημα το ένα ή και τα δύο άκρα του δεν αλλάζουμε την ισχύ του διαστήματος:

$$(0, 1) =_c (0, 1]$$

Για να κατασκευάσουμε μια 1-1 και επί συνάρτηση μεταξύ του αυτών των διαστημάτων, διαμερίζουμε το $(0,1]$ σε δύο ξένα υποσύνολα

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad B = (0,1] \setminus A.$$

Αντίστοιχα, το $(0,1)$ διαμερίζεται στα

$$A \setminus \{1\} \quad \text{και} \quad B$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$f : A \longrightarrow A \setminus \{1\} : f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$$

είναι 1-1 και επί. Συμπληρώνουμε την f θεωρώντας στο B την ταυτοτική συνάρτηση:

$$g : (0,1] \longrightarrow (0,1) : g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n} \in A \\ x, & x \in B \end{cases}$$

14.4 Ορισμός. Λέμε ότι το σύνολο A ***έχει μικρότερη ισχύ*** από το σύνολο B, αν υπάρχει 1-1 απεικόνιση

$$f : A \longrightarrow B,$$

ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει απεικόνιση επί

$$g : B \longrightarrow A.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $|A| \leq |B|$ ή $A \leq_c B$.

Όπως η σχέση $=_c$ έχει τις ιδιότητες μιας σχέσης ισοδυναμίας, έτσι και η σχέση $\leq_c$ φαίνεται σαν διάταξη στην οικογένεια όλων των συνόλων. Πράγματι, είναι προφανές ότι είναι ανακλαστική και μεταβατική. Δεν είναι όμως καθόλου προφανές αν ισχύει κάποιο είδος αντισυμμετρίας. Θα συζητήσουμε αυτό το θέμα αργότερα, με το Θεώρημα των Schröder-Bernstein.

14.5 Πρόταση. *Έστω A, B σύνολα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) $|A| \leq |B|$.
(ii) Υπάρχει $C \subseteq B$ *με* $A =_c C$.

Απόδειξη. $(i \Rightarrow ii)$ Από την υπόθεση, υπάρχει $f : A \to B$, που είναι 1-1. Θέτουμε $C = f(A)$. Τότε η $h : A \to C$ με $h(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$, είναι 1-1 και επί, δηλ. $A =_c C$.

$(ii \Rightarrow i)$ Έστω $C \subseteq B$ και $f : A \to C$ 1-1 και επί. Θεωρούμε και την εμφύτευση $\varepsilon : C \to B$, με $\varepsilon(x) = x$, για κάθε $c \in C$. Τότε η σύνθεση $\varepsilon \circ f : A \to B$ είναι 1-1, και $A \leq_c B$. □

Παρακάτω χρησιμοποιούμε το σύμβολο T_n για το σύνολο των n πρώτων μη-μηδενικών φυσικών αριθμών, δηλ.

$$T_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

14.6 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Το A λέγεται:

–***πεπερασμένο***, αν $A = \emptyset$ ή $A =_c T_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
–***άπειρο αριθμήσιμο***, αν $A =_c \mathbb{N}$.
–***αριθμήσιμο***, αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο.
–***υπεραριθμήσιμο***, αν δεν είναι αριθμήσιμο,
–***άπειρο***, αν είναι άπειρο αριθμήσιμο, ή υπεραριθμήσιμο.

Σκοπός μας παρακάτω είναι να αποδείξουμε ότι πεπερασμένα σύνολα είναι μόνο τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ (και τα ισοπληθικά τους). Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι ισοδύναμο με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Πράγματι, αν A είναι αριθμήσιμο, τότε ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

– $A = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$.
– A πεπερασμένο, άρα $A =_c T_n \subseteq \mathbb{N}$.
– A άπειρο αριθμήσιμο, άρα $A =_c \mathbb{N}$.

14.7 Λήμμα. *Έστω $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε*

$$\phi(n) \geq n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Το δείχνουμε επαγωγικά: $\phi(1) \in \mathbb{N}$, άρα ισχύει $\phi(1) \geq 1$. Έστω $\phi(n) \geq n$. Επειδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα,

$$\phi(n+1) > \phi(n) \geq n \implies \phi(n+1) > n \implies \phi(n+1) \geq n+1. \qquad \square$$

14.8 Λήμμα. *Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$.

Αν $A = \emptyset$, τότε το A είναι πεπερασμένο, άρα αριθμήσιμο. Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, τότε από την Αρχή Ελαχίστου, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο $\phi(1) \in A$.

Θεωρούμε το $A \setminus \{\phi(1)\}$. Αν $A \setminus \{\phi(1)\} = \emptyset$, τότε το $A = \{\phi(1)\} =_c T_1$, δηλ. το A είναι πεπερασμένο, άρα αριθμήσιμο. Αν $\emptyset \neq A \setminus \{\phi(1)\} \subseteq \mathbb{N}$, τότε από την Αρχή Ελαχίστου, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο $\phi(2) \in A \setminus \{\phi(1)\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\} = \emptyset$, τότε

$$A = \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\} =_c T_n,$$

δηλ. το A είναι πεπερασμένο, άρα αριθμήσιμο. Αν δεν υπάρχει τέτοιο n, δηλ. αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\} \neq \emptyset$, τότε ορίζεται μια συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N} : n \longmapsto \phi(n).$$

Από τον ορισμό της η ϕ είναι 1-1:

$$n > m \implies \phi(n) \in A \setminus \{\phi(1), \ldots, \phi(m), \ldots, \phi(n-1)\} \implies \phi(n) \neq \phi(m).$$

Δείχνουμε ότι η ϕ είναι επί. Έστω ένα $x \in A$. Επειδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, από το προηγούμενο λήμμα, $\phi(n) \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η εικόνα $\phi(\mathbb{N})$ δεν είναι φραγμένη. Άρα το x δεν είναι άνω φράγμα, επομένως υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ με $\phi(k_o) > x$. Θέτουμε

$$A_x = \{k \in \mathbb{N} \mid \phi(k) > x\}.$$

Τότε $k_o \in A_x$, άρα $\emptyset \neq A_x \subseteq \mathbb{N}$, και από την Αρχή Ελαχίστου υπάρχει ελάχιστο στοιχείο $m \in A_x$. Επειδή λοιπόν το m είναι το μικρότερο στοιχείο που ανήκει στο A_x, $m - 1 \notin A_x$, άρα $\phi(m-1) \leq x$.

Αν $\phi(m-1) < x$, τότε $x \in A \setminus \{\phi(1), \ldots, \phi(m-1)\}$, και συγχρόνως, η ανισότητα $x < \phi(m)$ σημαίνει το x είναι μικρότερο από το ελάχιστο στοιχείο του $A \setminus \{\phi(1), \ldots, \phi(m-1)\}$, άτοπο. Άρα $x = \phi(m-1) \in \phi(\mathbb{N})$ και η ϕ είναι επί.

Η ύπαρξη της αμφιμονοσήμαντης $\phi : \mathbb{N} \to A$ μας δίνει ότι $A =_c \mathbb{N}$, δηλ. το A είναι άπειρο αριθμήσιμο. □

14.9 Πόρισμα. *Έστω $A \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) A αριθμήσιμο.

(ii) Υπάρχει απεικόνιση $f : A \to \mathbb{N}$ 1-1.

(iii) Υπάρχει απεικόνιση $g : \mathbb{N} \to A$ επί.