ΜΑΘΗΜΑ 08

11 Σχέσεις Διάταξης

11.1 Ορισμός. Έστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια σχέση $R \subseteq X \times X$ λέγεται ***διάταξη***, αν είναι

(Δ1) *ανακλαστική*, δηλ. $\forall \ x \in X \ : \ xRx$,

(Δ2) *αντισυμμετρική*, δηλ. $xRy \ \wedge \ yRx \implies x = y$, και

(Δ3) *μεταβατική*, δηλ. $xRy \ \wedge \ yRz \implies xRz$.

11.2 Παραδείγματα. (1) Η σχέση $x \leq y$ στο $\mathbb{R}$.

(2) Η σχέση $A \subseteq B$ στο $\mathcal{P}(X)$.

(3) Η σχέση $a|b$ στο $\mathbb{N}$.

Στο προηγούμενο Παράδειγμα (1), παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Τα επόμενα δύο παραδείγματα δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Πράγματι, στο (2), αν το σύνολο X έχει δύο ή περισσότερα στοιχεία, τότε υπάρχουν $a, b \in X$ με $a \neq b$. Σε αυτή την περίπτωση είναι $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(X)$, αλλά δεν ισχύει ούτε $\{a\} \subseteq \{b\}$ ούτε $\{b\} \subseteq \{a\}$. Στο (3), έχουμε $5 \in \mathbb{N}$ και $6 \in \mathbb{N}$ αλλά δεν ισχύει ούτε $5|6$, ούτε $6|5$.

11.3 Ορισμός. Μια διάταξη R στο σύνολο $X \neq \emptyset$ λέγεται ***ολική*** αν

(ΟΔ) $\quad \forall \ x, y \in X \ : \ xRy \ \vee \ yRx$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της διάταξης, οι σχέσεις $<$ στο $\mathbb{R}$ και $\subsetneqq$ στο $\mathcal{P}(X)$ *δεν* είναι διατάξεις: δεν είναι ανακλαστικές. Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεση στην αντισυμμετρική ιδιότητα δεν ικανοποιείται ποτέ. Για να περιλάβουμε στην μελέτη μας σχέσεις όπως αυτές, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

11.4 Ορισμός. Έστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια σχέση $S \subseteq X \times X$ λέγεται ***αυστηρή διάταξη***, αν έχει τις επόμενες ιδιότητες:

(ΑΔ1) $\forall \ x \in X \ : \ (x,x) \notin S$.
(ΑΔ2) $(x,y) \in S \implies (y,x) \notin S$.
(ΑΔ3) $xSy \ \wedge \ ySz \implies xSz$ (μεταβατικότητα).

Υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_X$ την *διαγώνιο* του X, δηλ. το σύνολο

$$\mathcal{D}_X = \{(x,x) : x \in X\}.$$

Τότε, για μια διάταξη R ισχύει πάντοτε $\mathcal{D}_X \subseteq R$, ενώ για μια αυστηρή διάταξη S ισχύει $S \cap \mathcal{D}_X = \emptyset$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην επόμενη πρόταση:

11.5 Πρόταση. *Έστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Τότε:*
(i)Κάθε διάταξη $R \subseteq X \times X$ ορίζει μια αυστηρή διάταξη, την $S = R \setminus \mathcal{D}_X$.
(ii) Κάθε αυστηρή διάταξη $S \subseteq X \times X$ ορίζει μια διάταξη, την $R = S \cup \mathcal{D}_X$.

Απόδειξη. (i) Έστω R μια διάταξη στο X. Ορίζουμε την σχέση $S = R \setminus \mathcal{D}_X$, δηλ.

$$xSy \iff (x,y) \in R \setminus \mathcal{D}_X \iff xRy \ \wedge \ x \neq y.$$

Θα δείξουμε ότι η S είναι αυστηρή διάταξη. Πράγματι:

(ΑΔ1) Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(x,x) \in \mathcal{D}_X$, άρα $(x,x) \notin R \setminus \mathcal{D}_X = S$.

(ΑΔ2) Με άτοπο: Έστω xSy και ySx. Τότε (xRy και $x \neq y$) και (yRx και $y \neq x$). Δηλ. xRy και yRx και $x \neq y$. Αλλά από την (Δ2) της R, οι xRy και yRx δίνουν $x = y$, άτοπο.

(ΑΔ3) Έστω xSy και ySz. Τότε (xRy και $x \neq y$) και (yRz και $y \neq z$). Από τις xRy και yRz, λόγω της μεταβατικότητας της R, έχουμε xRz. Επίσης είναι $x \neq z$. Πράγματι, αν $x = z$, τότε (βλ. τις δύο αρχικές υποθέσεις) xSy και ySx, άτοπο. Άρα xRz με $x \neq z$, δηλ. xSz.

(ii) Αντίστροφα, έστω S μια αυστηρή διάταξη στο X. Ορίζουμε την σχέση $R = S \cup \mathcal{D}_X$, δηλ.

$$xRy \iff xSy \ \vee \ x = y.$$

Θα δείξουμε ότι η R είναι διάταξη. Πράγματι:

(Δ1) Για κάθε $x \in X$, ισχύει $(x,x) \in \mathcal{D}_X$, άρα $(x,x) \in S \cup \mathcal{D}_X = R$ και η R είναι ανακλαστική.

(Δ2) Έστω xRy και yRx. Τότε

$$\begin{aligned} xRy \ \wedge \ yRx &\implies (xSy \ \vee \ x = y) \wedge (ySx \ \vee \ y = x) \\ &\implies (xSy \ \wedge \ ySx) \ \vee \ x = y. \end{aligned}$$

Η πρώτη συνθήκη δεν ικανοποιείται ποτέ, άρα $x = y$ και η R είναι αντισυμμετρική.

(Δ3) Έστω xRy και yRz. Τότε

$$\begin{aligned} xRy \ \wedge \ yRz \Longrightarrow \ & (xSy \vee x = y) \ \wedge \ (ySz \vee y = z) \\ \Longrightarrow \ & (xSy \wedge ySz) \ \vee \ (xSy \wedge y = z) \\ & \vee \ (x = y \wedge ySz) \ \vee \ (x = y \wedge y = z) \\ \Longrightarrow \ & xSz \ \vee \ xSz \ \vee \ xSz \ \vee \ x = z \\ \Longrightarrow \ & (x, z) \in S \cup \mathcal{D}_X = R, \end{aligned}$$

και η R είναι μεταβατική. □

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο δίνοντας ένα παράδειγμα ολικής διάταξης στους μιγαδικούς αριθμούς:

11.6 Παράδειγμα. Έστω $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε την εξής σχέση:

$$z_1 \leq z_2 \iff (x_1 < x_2) \ \vee \ (x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 \leq y_2).$$

(Δ1) Για κάθε $z = x + iy$, είναι $x = x$ και $y \leq y$, άρα $z \leq z$ και η σχέση είναι ανακλαστική.

(Δ2) για την αντισυμμετρία παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 \ \wedge \ z_2 \leq z_1 \Longrightarrow \ & [x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)] \\ & \wedge \ [x_2 < x_1 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)] \\ \Longrightarrow \ & [x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_1] \\ & \vee \ [x_1 < x_2 \ \wedge \ (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)] \\ & \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \ \wedge \ x_2 < x_1] \\ & \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \ \wedge \ (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)] \end{aligned}$$

Οι τρεις πρώτες συνθήκες δεν ισχύουν ποτέ, άρα

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_1 \ \Longrightarrow \ & (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1) \\ \Longrightarrow \ & x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 \leq y_2 \ \wedge \ y_2 \leq y_1 \\ \Longrightarrow \ & x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ \Longrightarrow \ & z_1 = z_2. \end{aligned}$$

(Δ3) Για την μεταβατικότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_3 \implies & [x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)] \\
& \wedge \ [x_2 < x_3 \vee (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\
\implies & [x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3] \\
& \vee \ [x_1 < x_2 \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\
& \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge x_2 < x_3] \\
& \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)]
\end{aligned}$$

Κάθε μια από τις τρεις πρώτες συνθήκες συνεπάγεται ότι $x_1 < x_3$ ενώ η τελευταία συνεπάγεται ότι $x_1 = x_3$ και $y_1 \leq y_3$. Άρα

$$\begin{aligned}
z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_3 & \implies x_1 < x_3 \vee (x_1 = x_3 \wedge y_1 \leq y_3) \\
& \implies z_1 \leq z_3.
\end{aligned}$$

(ΟΔ) Τέλος, η σχέση $z_1 \leq z_2$ είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{C}$: Θεωρούμε δύο τυχαία $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Για τα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1 < x_2$ ή $x_1 = x_2$ ή $x_2 < x_1$. Αν $x_1 < x_2$, τότε $z_1 \leq z_2$. Αν $x_2 < x_1$, τότε $z_2 \leq z_1$. Αν $x_1 = x_2$, εξετάζουμε την σχέση των y_1 και y_2: θα ισχύει $y_1 \leq y_2$ είτε $y_2 \leq y_1$. Στην πρώτη περίπτωση $z_1 \leq z_2$ ενώ στην δεύτερη $z_2 \leq z_1$. Άρα τελικά, για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ισχύει είτε $z_1 \leq z_2$ είτε $z_2 \leq z_1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν $z_1 \leq z_2$ και $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο, εύκολα βλέπει κανείς ότι $z_1 + z \leq z_2 + z$. Όμως, αν $z_1 \leq z_2$ και $0 < z$, δεν εξασφαλίζεται ότι $z_1 z \leq z_2 z$.