ΜΑΘΗΜΑ 05

7 Καρτεσιανό Γινόμενο

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, $\{a, b\} = \{b, a\}$. Σε κάποιες περιπτώσεις θέλουμε να αποκτήσει σημασία η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου. Για να μην προκύψουν ερωτήσεις της μορφής ¨τί είναι η σειρά;¨, τί θα πει γράφω ¨πρώτα¨ το a και ¨μετά¨ το b, κλπ., πράγμα που θα μας οδηγήσει σε μια ατέλειωτη σειρά ορισμών αμφίβολης ακρίβειας, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

7.1 Ορισμός (Kuratowski)**.** Ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος*** των a, b (με πρώτο το a και δεύτερο το b) το σύνολο

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Αυτός ο ορισμός προσδίδει στα διατεταγμένα ζεύγη την χαρακτηριστική ιδιότητα που περιγράφεται στην επόμενη

7.2 Πρόταση. *Για τα διατεταγμένα ζεύγη* (a, b) *και* (c, d) *ισχύει η ισοδυναμία*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Η ισότητα $(a, b) = (c, d)$ ισοδυναμεί με την ισότητα των συνόλων

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}, \tag{12}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Έχουμε δύο περιπτώσεις:

(1) $\{a\} = \{c\}$, άρα και $a = c$. Τότε η (12) γίνεται $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, οπότε έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

(1α) $\{a, d\} = \{a\}$, δηλ. $a = d$. Τότε $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$, άρα $\{a, b\} = \{a\}$ και $a = b$, είτε

(1β) $\{a, d\} = \{a, b\}$. Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε είτε $d = a$ οπότε $\{a, a\} = \{a, b\}$ και $a = b = d$, είτε $b = d$.

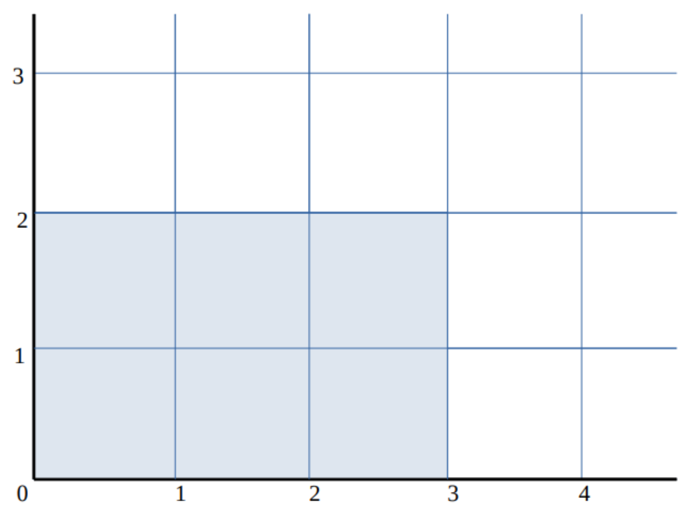
(2) $\{a\} = \{c, d\}$, άρα $a = c = d$. Τότε η (12) γίνεται $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$ απ' όπου έχουμε ότι $\{a, b\} = \{a\}$ και $b = a = d$.

($\Leftarrow$) Προφανές. $\square$

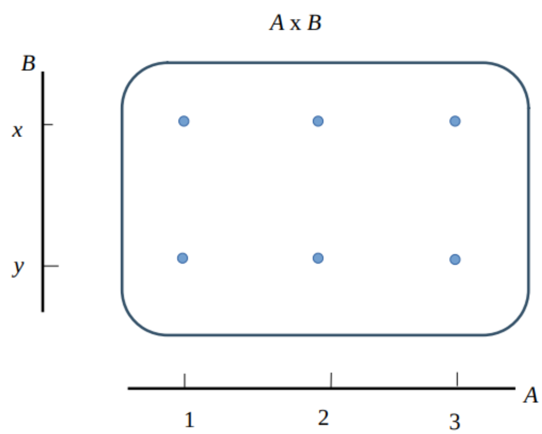
7.3 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** των A και B το σύνολο

$$A \times B = \{\ (a, b) \mid a \in A\ \wedge\ b\ \in B\ \}.$$

Θεωρείστε για λίγο γνωστό το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και το ευκλείδιο επίπεδο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Έστω A και B τα διαστήματα $A = [0, 3]$ και $B = [0, 2]$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ αποτελείται από την χρωματισμένη περιοχή του παρακάτω σχήματος:



Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το καρτεσιανό γινόμενο δύο τυχαίων συνόλων A, B, με παρόμοι τρόπο. Π.χ., για $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{x, y\}$, έχουμε το διάγραμμα



7.4 Παρατηρήσεις. Παρατηρούμε ότι:

(1) Στον ορισμό του καρτεσιανού γινόμενου φαίνεται σαν να παραβιάζεται πάλι ο κανόνας (**) του Μαθήματος 01, αλλά δεν είναι έτσι:

$$\begin{aligned} a, b \in A \cup B \ &\Rightarrow \ \{a\}, \{a, b\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Rightarrow \ \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Rightarrow \ \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \end{aligned}$$

(2) Για κάθε σύνολο A, ισχύει $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

(3) Για τυχαία σύνολα A, B, C, εν γένει

$$A \times B \neq B \times A,$$
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.$$

7.5 Πρόταση. *Έστω A, B, C σύνολα. Τότε ισχύουν οι ισότητες:*

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(iv) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε δύο από τις ισότητες, οι υπόλοιπες αποδεικνύονται ανάλογα. Για την (i) έχουμε:

$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\cup C) &\iff x\in A \ \wedge\ y\in B\cup C\\ &\iff x\in A \ \wedge\ (y\in B\vee y\in C)\\ &\iff (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\ &\iff [(x,y)\in A\times B]\ \vee\ [(x,y)\in A\times C]\\ &\iff (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C).\end{aligned}$$

Για την (iv) έχουμε:

$$\begin{aligned}(x,y)\in (A\cap B)\times C &\iff x\in (A\cap B)\ \wedge\ y\in C\\ &\iff (x\in A\wedge x\in B)\ \wedge\ y\in C\\ &\iff (x\in A\wedge y\in C)\ \wedge\ (x\in B\wedge y\in C)\\ &\iff (x,y)\in A\times C\ \wedge\ (x,y)\in B\times C\\ &\iff (x,y)\in (A\times C)\cap(B\times C).\end{aligned}$$

□

7.6 Πρόταση. *Έστω A, B, C, D σύνολα. Τότε*
(i) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.
(ii) $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x,y)\in (A\times B)\cap(C\times D) &\iff (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D)\\ &\iff (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D)\\ &\iff (x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)\\ &\iff x\in A\cap C\wedge y\in B\cap D\\ &\iff (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).\end{aligned}$$

Για την (ii) παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$ έχουμε $(x,y)\in(A\times B)\vee(x,y)\in(C\times D)$.

Αν $(x,y)\in(A\times B)$, τότε $x\in A$ και $y\in B$, άρα $x\in A\cup C$ και $y\in B\cup D$, επομένως $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Αν $(x,y)\in(C\times D)$, τότε $x\in C$ και $y\in D$, άρα $x\in A\cup C$ και $y\in B\cup D$, επομένως $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$. □

Η τελευταία σχέση εν γένει δεν είναι ισότητα. Π.χ., ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$ και $D=\{d\}$, όπου $a\neq c$ και $b\neq d$. Τότε

$$(A\times B)\cup(C\times D)=\{(a,b)\}\cup\{(c,d)\}=\{(a,b),(c,d)\},$$

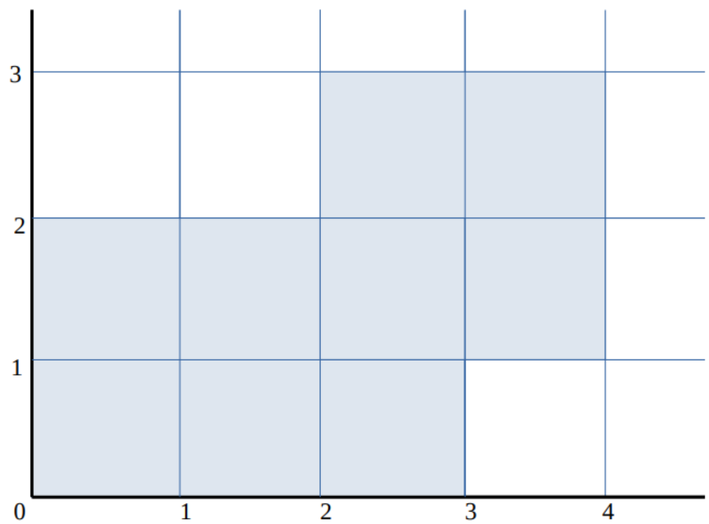
ενώ

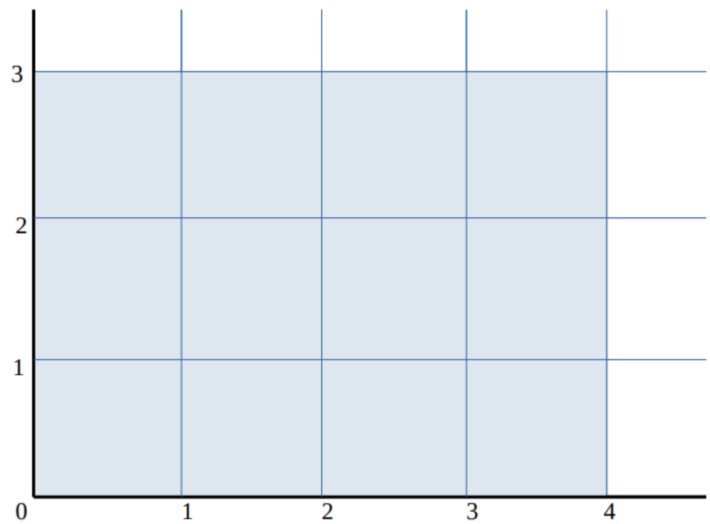
$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{a, c\} \times \{b, d\} = \{(a, b), (a, d), (c, b), (c, d)\}.$$

Για ένα άλλο παράδειγμα, θεωρείστε

$$A = [0, 3], C = [2, 4], B = [0, 2], D = [1, 3] \subseteq \mathbb{R}.$$

Τότε $A \cup C = [0, 4]$ και $B \cup D = [0, 3]$. Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε χρωματισμένο το σύνολο $(A \times B) \cup (C \times D)$ και στο δεύτερο το $(A \cup C) \times (B \cup D)$.





Στο τελευταίο διάγραμμα βλέπουμε συγκριτικά και την ισότητα (i) της πρότασης.