ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. Να δείξετε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο.

Απάντηση. Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Τότε:

A άπειρο $\implies$ A όχι πεπερασμένο $\implies$ $A \neq \emptyset$ $\implies$ $\exists\, a_1 \in A$.

Αν $A \setminus \{a_1\} = \emptyset \implies A = \{a_1\} =$ πεπερασμένο, άτοπο.
Άρα $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset \implies \exists\, a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.

Αν $A \setminus \{a_1, a_2\} = \emptyset \implies A = \{a_1, a_2\} =$ πεπερασμένο, άτοπο.
Άρα $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset \implies \exists\, a_3 \in A \setminus \{a_1\, a_2\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, οπότε παίρνουμε ένα σύνολο

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq A$$

στο οποίο $a_i \neq a_j$, για κάθε $i \neq j$, και για το οποίο ισχύει $B =_c \mathbb{N}$, διότι η απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow B : \phi(n) = a_n$$

είναι 1-1 και επί.

2. Δείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

Απάντηση. Έστω A άπειρο. Από την Άσκηση 1, υπάρχει

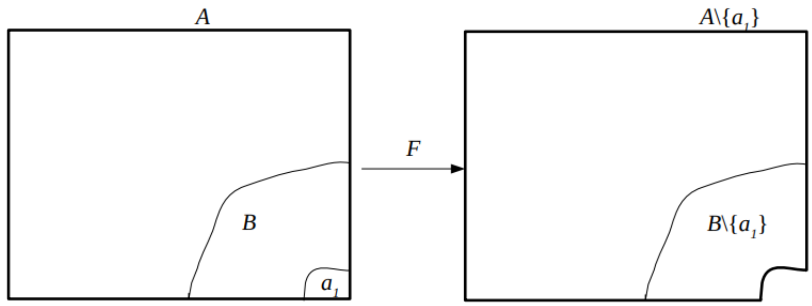
$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq A.$$

Θέτουμε

$$C = B \setminus \{a_1\} = \{a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Η $f : B \to C : f(a_k) = a_{k+1}$ είναι 1-1 και επί, άρα $B =_c C$. Θέτουμε

$$F : A \longrightarrow A \setminus \{a_1\} : F(x) = \begin{cases} x, & x \notin B \\ f(x), & x \in B \end{cases}$$



Η F είναι 1-1 και επί, άρα $A =_c A \setminus \{a_1\}$.

3. Έστω B, C άπειρα αριθμήσιμα σύνολα. Να δείξετε ότι $B \cup C$ είναι άπειρο αριθμήσιμο.

Απάντηση. Επειδή τα B, C είναι άπειρα αριθμήσιμα, παίρνουν την μορφή

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$
$$C = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$f : B \longrightarrow B \cup C : f(x_n) = x_n$$

είναι 1-1, άρα $B \leq_c C$. Από την άλλη μεριά, η συνάρτηση

$$g : B \longrightarrow B \cup C : g(x_n) = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ y_k, & n = 2k-1 \end{cases}$$

είναι επί, άρα $B \cup C \leq_c B$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα Schröder-Bernstein.

4. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.

Απάντηση. Έστω ότι το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Τότε το $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι ένωση δύο αριθμησίμων συνόλων, άρα από την Ασκ. 3 το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, άτοπο.

5. Έστω A άπειρο και C άπειρο αριθμήσιμο. Να δείξετε ότι $A \cup C =_c A$.

Απάντηση. Από την Ασκ. 2, υπάρχει υποσύνολο

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq A.$$

Από την υπόθεση, το C έχει την μορφή

$$C = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}.$$

Λόγω της Ασκ. 4, το $B \cup C$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, άρα υπάρχει

$$h : B \longrightarrow B \cup C, \qquad \text{1-1 και επί.}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η

$$f : A \longrightarrow A \cup C : f(x) = x$$

είναι 1-1, άρα $A \leq_c A \cup C$, ενώ η

$$g : A = (A \setminus B) \cup B \longrightarrow A \cup C = (A \setminus B) \cup B \cup C :$$
$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus B \\ h(x), & x \in B \end{cases}$$

είναι επί, άρα $A \cup C \leq_c A$, και η ισότητα των πληθαρίθμων προκύπτει από το Θεώρημα Schröder-Bernstein.

6. Αν τα σύνολα A, B είναι αριθμήσιμα, να δείξετε ότι το $A \times B$ είναι επίσης αριθμήσιμο.

Απάντηση. Από την αριθμησιμότητα των A και B προκύπτει ότι υπάρχουν απεικονίσεις

$$f : A \to \mathbb{N} \quad \text{και} \quad g : B \to \mathbb{N}$$

που είναι 1-1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f \times g : A \times B \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (f \times g)(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Η $f \times g$ είναι 1-1: αν $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ με $(f \times g)(a_1, b_1) = (f \times g)(a_2, b_2)$, τότε $(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$, δηλ. $f(a_1) = f(a_2)$ και $g(b_1) = g(b_2)$. Λόγω του 1-1 των f και g, έχουμε $a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$, δηλ. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Άρα η

$$\phi \circ (f \times G) : A \times B \to \mathbb{N}$$

είναι 1-1, επομένως $A \times B \leq_c \mathbb{N}$, δηλ. το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

7. Να δείξετε ότι το σύνολο A των ακολουθιών $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απάντηση. Έστω ότι το A είναι αριθμήσιμο. Τότε υπάρχει $\phi : \mathbb{N} \to A$ που είναι επί. Κάθε εικόνα $\phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μια ακολουθία

$$\phi(n) = (a_k^n)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_n^n, \dots),$$

όπου $a_k^n \in \{0,1\}$, για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $\alpha \in A$, λόγω του επί της ϕ, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\phi(n) = \alpha$.

Ορίζουμε τώρα μια ακολουθία $\xi = (\xi_n)$, θέτοντας $\xi_n = 1 - a_n^n \in \{0,1\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\xi \in A$, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $\phi(m) = \xi$, δηλ.

$$(a_1^m, a_2^m, a_3^m, \dots, a_m^m, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m, \dots),$$

που είναι άτοπο, γιατί οι δύο ακολουθίες έχουν διαφορετικό τον m-οστό όρο: $\xi_m = 1 - a_m^m \neq a_m^m$.

8. Έστω $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη οικογένεια αριθμησίμων συνόλων. Να δείξετε ότι η ένωση $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_k$ είναι αριθμήσιμη.

Απάντηση. Επειδή κάθε A_k είναι αριβμήσιμο, παίρνει την μορφή

$$A_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_k^k, \dots\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε

$$\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A : \phi(n,k) = a_n^k.$$

9. Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα A_1, A_2, το σύνολο $I = \{1,2\}$ και το σύνολο F των συναρτήσεων

$$F : \{f : I \to A_1 \cup A_2 \mid f(i) \in A_i,\ i = 1,2\}.$$

Να δείξετε ότι $F =_c A_1 \times A_2$.

Απάντηση. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G : F \to A_1 \times A_2 : G(f) = (f(1), f(2)).$$

Η G είναι 1-1: Αν $f, h \in F$ με $G(f) = G(h)$, τότε $(f(1), f(2)) = (h(1), h(2))$, άρα $f(1) = h(1)$ και $f(2) = h(2)$, δηλ. $f = h$. Επίσης η G είναι επί: για κάθε $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, θέτουμε $f : T \to A_1 \times A_2$ με $f(1) = a_1$ και $f(2) = a_2$. Τότε $f \in F$ με $G(f) = (a_1, a_2)$.

10. Θεωρούμε τρία μη κενά σύνολα A, B, C και τα σύνολα συναρτήσεων

$$\begin{aligned} X &= \{f : B \to C\} \\ Y &= \{g : A \to X\} \\ Z &= \{h : A \times B \to C\} \end{aligned}$$

Να δείξετε ότι $Z =_c Y$.

Απάντηση. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $k : Z \to Y$. Έστω $h \in Z$, δηλ. $h : A \times B \to C$. Για να ορίσουμε την $k(h) \in Y$, δηλ. την απεικόνιση $k(h) : A \to X$, πρέπει, για κάθε $a \in A$, να ορίσουμε την εικόνα $[k(h)](a) \in X$, δηλ. να ορίσουμε την απεικόνιση

$$[k(h)](a) : B \longrightarrow C.$$

Θέτουμε

$$[k(h)](a) = h_a,$$

όπου h_a είναι η *μερική απεικόνιση*

$$h_a : B \longrightarrow C : h_a(b) = h(a, b).$$

Δείχνουμε τώρα ότι η k είναι 1-1 και επί:

(1) Η k είναι 1-1: Έστω $h_1, h_2 \in Z$ με $k(h_1) = k(h_2) \in Y$, δηλαδή $k(h_1) = k(h_2) : A \to X$. Η ισότητα των δύο απεικονίσεων σημαίνει ότι $[k(h_1)](a) = [k(h_2)](a) \in X$, για κάθε $a \in A$, δηλ. ότι $h_{1a} = h_{2a} : B \to C$, επομένως, $h_1(a, b) = h_2(a, b)$, για κάθε $(a, b) \in A \times B$, ή ισοδύναμ ότι $h_1 = h_2$ και η k είναι 1-1.

(2) Η k είναι επί: Έστω $g \in Y$ Θα δείξουμε ότι υπάρχει $h \in Z$ με $k(h) = g$. Η $g \in Y$ είναι μια απεικόνιση $g : A \to X$. Δηλ. για κάθε $a \in A$, η $g(a) \in X$ είναι μια απεικόνιση $g(a) : B \to C$. Επομένως, για κάθε $b \in B$, ορίζεται η εικόνα $[g(a)](b) \in C$. Θέτουμε

$$h : A \times B \longrightarrow C : h(a, b) = [g(a)](b).$$

Μένει να δείξουμε ότι $g = k(h) : A \to X$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$g(a) = [k(h)](a) = h_a : B \to C,$$

για κάθε $a \in A$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in B$,

$$[g(a)](b) = h_a(b) = h(a, b),$$

που ισχύει από τον ορισμό της h.

11. Στο ευκλείδιο επίπεδο πόσοι κύκλοι με κέντρο $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ και ακτίνα $\sqrt{2}$ υπάρχουν;

Απάντηση. Έστω $C((x, y), \sqrt{2})$ ο κύκλος με κέντρο (x, y) και ακτίνα $\sqrt{2}$ και $\mathcal{C}$ το σύνολο αυτών των κύκλων. Θέτουμε

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : F(C((x, y), \sqrt{2})) = (x, y).$$

Προφανώς η F είναι 1-1 και επί, άρα

$$|\mathcal{C}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|.$$

12. Στο ευκλείδιο επίπεδο πόσοι κύκλοι με κέντρο $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ και ακτίνα $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ υπάρχουν;

Απάντηση. Συμβολίζουμε με $C((x, y), \rho)$ τον κύκλο με κέντρο (x, y) και ακτίνα ρ και $\mathcal{C}$ το σύνολο των κύκλων με $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ και $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Θέτουμε

$$G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)] : G(C((x, y), \rho)) = (x, y, \rho).$$

Προφανώς η F είναι 1-1 και επί, άρα

$$|\mathcal{C}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)]|.$$

Εξετάζουμε το δεύτερο σύνολο: το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμο (Άσκ. 4). Ομοίως το $(0, +\infty)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αν η τομή $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)$ είναι αριθμήσιμη, η ένωση $[(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)] \cup \mathbb{Q}$ είναι επίσης αριθμήσιμη, άτοπο γιατί περιέχει όλο το $(0, +\infty)$ που είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα το $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)]$ έχει μεγαλύτερη ισχύ, αφού η

$$\phi : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)] : \phi(x) = (0, 0, x)$$

είναι 1-1, άρα και τα $\mathcal{C}$ και $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, +\infty)]$ είναι υπεραριθμήσιμα.