ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1. Να δείξετε ότι:

(i) Για κάθε σύνολο A ισχύει $\emptyset \subseteq A$.

(ii) Αν για ένα σύνολο A ισχύει $A \subseteq \emptyset$, τότε $A = \emptyset$.

Απάντηση. (i) Έστω A ένα σύνολο. Αν δεν ισχύει $\emptyset \subseteq A$, τότε υπάρχει $x \in \emptyset$, με $x \notin A$, άτοπο.

(ii) Είναι πάντοτε $\emptyset \subseteq A$. Αν είναι και $A \subseteq \emptyset$, τότε από την ισοδυναμία (4) του Μαθήματος 01, προκύπτει $A = \emptyset$.

2. Να υπολογίσετε τα δυναμοσύνολα των συνόλων $A_o = \emptyset$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$.

Απάντηση. Είναι

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(A_o) = \{\emptyset\}\\
&\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{1\}\}\\
&\mathcal{P}(A_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\\
&\mathcal{P}(A_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}
\end{aligned}$$

3. Να δείξετε με αντιπαράδειγμα ότι η σχέση ¨$\in$¨ δεν είναι μεταβατική.

Απάντηση. Έστω $A = \{1\}$ και $B = \{\{1\}, 2\} = \{A, 2\}$. Τότε $1 \in A$ και $A \in B$ αλλά $1 \notin B$.

4. Έστω A, B σύνολα. Να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$A \cap B = A \iff A \subseteq B.$$

Απάντηση. ($\Rightarrow$) Έστω $A \cap B = A$. Επειδή για οποιαδήποτε σύνολα X, Y ισχύει $X \cap Y \subseteq X$ και $X \cap Y \subseteq Y$, έχουμε οτι $A = A \cap B \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Έστω $A \subseteq B$. Θδο $A \cap B = A$. Είναι πάντοτε $A \cap B \subseteq A$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $A \subseteq A \cap B$. Πράγματι, για κάθε $x \in A \subseteq B$ ισχύει και $x \in B$, άρα και $x \in A \cap B$.

5. Έστω A, B σύνολα. Να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$A \cup B = B \iff A \subseteq B.$$

Απάντηση. (⇒) Έστω $A \cup B = B$. Επειδή για οποιαδήποτε σύνολα X, Y ισχύει $X \subseteq X \cup Y$ και $Y \subseteq X \cup Y$, έχουμε οτι $A \subseteq A \cup B = B$.

(⇐) Έστω $A \subseteq B$. Θδο $A \cup B = B$. Είναι πάντοτε $B \subseteq A \cup B$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $A \cup B \subseteq B$. Πράγματι, για κάθε $x \in A \cup B$ ισχύει $x \in A$ είτε $x \in B$. Αν $x \in A \subseteq B$, τότε $x \in B$. Αν $x \in B$, τότε $x \in B$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε το ζητούμενο.

6. Έστω A, B σύνολα. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες:
(*i*) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(*ii*) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(*iii*) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Απάντηση. (*i*) Δεν ισχύει. Π.χ., έστω $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$. Τότε είναι $A \cup B = \{1, 2\}$ και

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} \\
&\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\} \\
&\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \\
&\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}
\end{aligned}$$

(*ii*) Ισχύει:

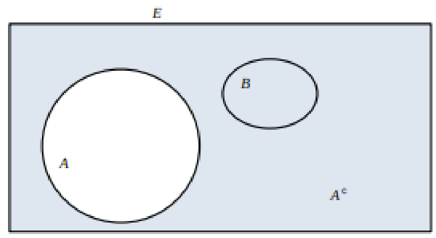
$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B \\
&\iff X \in \mathcal{P}(A) \ \wedge \ X \in \mathcal{P}(B) \\
&\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)
\end{aligned}$$

(*iii*) Δεν ισχύει: για οποιαδήποτε σύνολα A και B, είναι $\emptyset \in \mathcal{P}(A \setminus B)$ αλλά $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

7. Έστω E σύνολο αναφοράς και $A, B \subseteq E$. Να δείξετε ότι
(*i*) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \cap A^c = B$.
(*ii*) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.
(*iii*) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B \setminus A) = B$.
(*iv*) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Απάντηση. (*i*) Χρησιμοποιώντας την Ασκ. 4, έχουμε

$$A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ B \subseteq A^c \ \Rightarrow \ B \cap A^c = B.$$



(ii) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $A \setminus B = A \cap B^c$ έχουμε

$$A^c \setminus B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B \cap A^c = B \setminus A.$$

Μια άλλη απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος μας δίνουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} x \in A^c \setminus B^c &\iff x \in A^c \ \wedge \ x \notin B^c \\ &\iff x \notin A \ \wedge \ x \in B \\ &\iff x \in B \setminus A. \end{aligned}$$

(iii) Έστω $A \subseteq B$. Θδο $A \cup (B \setminus A) \subseteq B$ και $B \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Πράγματι, $A \subseteq B$ και $B \setminus A \subseteq B$, άρα και $A \cup (B \setminus A) \subseteq B$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in B$, ισχύει ή $x \in A$ ή $x \notin A$. Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup (B \setminus A)$. Αν $x \notin A$, τότε $x \in B \setminus A$, άρα και $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Για μια άλλη απόδειξη, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $A \subseteq B$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus A) &= A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap E = A \cup B = B. \end{aligned}$$

(iv) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap (A \setminus B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B. \end{aligned}$$

8. Έστω $X, Y \subseteq E$. Απλοποιείστε την παράσταση

$$(X^c \cup Y)^c \cup (X \cap Y).$$

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι

$$(X^c \cup Y)^c \cup (X \cap Y) = (X \cap Y^c) \cup (X \cap Y) = X \cap (Y^c \cup Y)$$
$$= X \cap E = X.$$

9. Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες de Morgan και την επιμεριστική ιδιότητα (i) της Πρότασης 3.5, να δείξετε ότι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα (ii) της ίδιας Πρότασης.

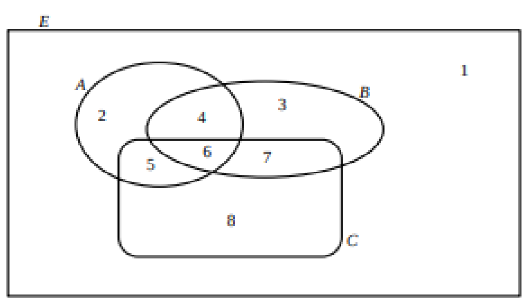
Απάντηση. Θέτουμε $X = A^c$, $Y = B^c$ και $Z = C^c$. Γνωρίζουμε ότι για τα σύνολα X, Y, Z, ισχύει

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Παίρνοντας τα συμπληρώματα των δύο ανωτέρω ίσων συνόλων, έχουμε

$$\begin{aligned}
&X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \implies \\
&[X \cap (Y \cup Z)]^c = [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)]^c \implies \\
&X^c \cup (Y \cup Z)^c = (X \cap Y)^c \cap (X \cap Z)^c \implies \\
&X^c \cup (Y^c \cap Z^c) = (X^c \cup Y^c) \cap (X^c \cup Z^c) \implies \\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

10. Έστω E σύνολο αναφοράς και $A, B, C \subseteq E$, όπως στο διάγραμμα



Χρησιμοποιώντας ενώσεις, τομές, και διαφορές των A, B και C, να περιγράψετε τις αριθμημένες περιοχές του διαγράμματος.

Απάντηση. Έχουμε:
1: $E \setminus (A \cup B \cup C) = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

2: $A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap B^c \cap C^c$
3: $B \setminus (A \cup C) = B \cap (A \cup C)^c = B \cap A^c \cap C^c$
4: $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap C^c$
5: $(A \cap C) \setminus B = A \cap C \cap B^c$
6: $A \cap B \cap C$
7: $(B \cap C) \setminus A = B \cap C \cap A^c$
8: $C \setminus (A \cup B) = C \cap (A \cup B)^c = C \cap A^c \cap B^c$

11. Να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A.$$

Απάντηση. ($\Rightarrow$) Θεωρούμε ότι ισχύει η ισότητα, χωρίς να ισχύει η σχέση $C \subseteq A$, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αν $C \nsubseteq A$, τότε υπάρχει $x \in C$ με $x \notin A$, οπότε $x \in (A \cap B) \cup C$ ενώ $x \notin A \cap (B \cup C)$, και τα δεδομένα σύνολα δεν είναι ίσα, άτοπο.

($\Leftarrow$) Έστω τώρα ότι $C \subseteq A$. Τότε $A \cup C = A$ και

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

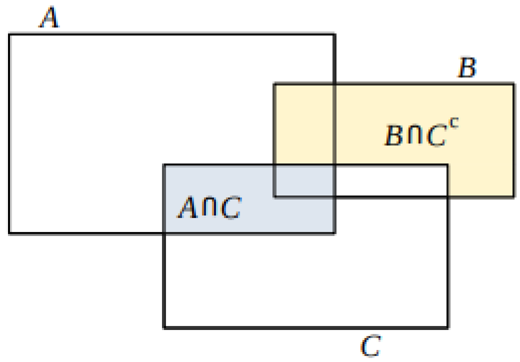
12. Για κάθε $A, B, C \subseteq E$, να δείξετε ότι
(i) $A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C^c)$.
(ii) $(A \cup C) \cap (B \cup C^c) \subseteq A \cup B$.

Απάντηση. (i) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$.

Σε σχέση με το C, ισχύει ή $x \in C$, ή $x \notin C$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} x \in C &\implies x \in A \cap C \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C^c) \\ x \notin C &\implies x \in B \cap C^c \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C^c) \end{aligned}$$

Στο διάγραμμα Venn που ακολουθεί, σημειώνουμε με γαλάζιο την τομή $A \cap C$ και με ροζ την τομή $B \cap C^c$.



(ii) Θεωρούμε $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C^c)$, άρα $x \in A \cup C$ και $x \in B \cup C^c$. Σε σχέση με το C, ισχύει ή $x \in C$, ή $x \notin C$. Παρατηρούμε ότι:

$$x \in C \implies x \notin C^c \implies x \in B \implies x \in A \cup B$$
$$x \notin C \implies x \in A \implies x \in A \cup B$$

13. Έστω E σύνολο αναφοράς και $A, B, C \subseteq E$.
(1) Να δείξετε ότι εν γένει
(1i) $A \setminus B \neq B \setminus A$, και
(1ii) $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.
(2) Να δείξετε τις ισοδυναμίες
(2i) $A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$, και
(2ii) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \iff A \cap C = \emptyset$

Απάντηση. (1i) Έστω $A = \{1, 2\}$ και $B = \{1\}$. Τότε $A \setminus B = \{2\}$, ενώ $B \setminus A = \emptyset$.

(1ii) Έστω A, B όπως στο (i) και $C = \{2\}$. Τότε

$$(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset,$$

ενώ

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}.$$

(2i) Έστω $A \setminus B = B \setminus A = X$. Τότε

$$X = X \cap X = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = \emptyset.$$

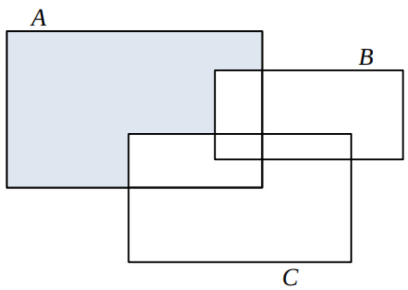
Όμως, $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ και $B \setminus A = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A$, άρα $A = B$. Αντίστροφα, αν $A = B$, τότε προφανώς $A \setminus B = \emptyset = B \setminus A$.

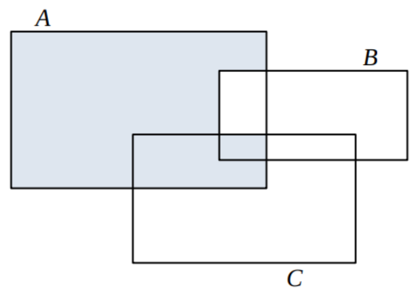
$(2ii)$ Παρατηρούμε ότι

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap B^c \cap C^c,$$
$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C),$$

απ' όπου προκύπτει ότι το $A \cap C$ είναι υποσύνολο του δεύτερου συνόλου ενώ το πρώτο σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο του C, άρα και του $A \cap C$.

Στα επόμενα διαγράμματα Venn φαίνονται αριστερά το σύνολο $(A \setminus B) \setminus C$ και δεξιά το $A \setminus (B \setminus C)$.





Για την απόδειξη της ισοδυναμίας, θα δείξουμε τις συνεπαγωγές

$$A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$$
$$A \cap C \neq \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} A \cap C = \emptyset &\Rightarrow A \subseteq C^c \Rightarrow A \cap C^c = A \\ &\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \cap B^c \cap C^c = A \cap B^c = A \setminus B \end{aligned}$$

και

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \cap B^c) \cup \emptyset = A \setminus B.$$

Οπότε έχουμε την ισότητα. Για την δεύτερη συνεπαγωγή, θεωρούμε $x \in A \cap C$. Τότε

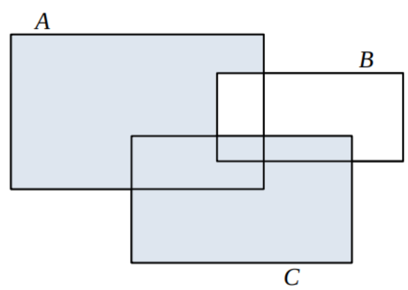
$$x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C),$$

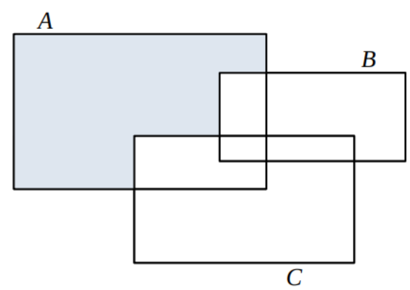
ενώ

$$\begin{aligned} x \in A \cap C &\Rightarrow x \notin C^c \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B^c \cap C^c = (A \setminus B) \setminus C \end{aligned}$$

14. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι επιμερισμοί
(i) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.
(ii) $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C)$.

Απάντηση. (i) Στα παρακάτω διαγράμματα Venn βλέπουμε αριστερά το σύνολο $(A \setminus B) \cup C$ και δεξιά το $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$.





Φαίνεται να διαφέρουν κατά το σύνολο C. Οπότε οδηγούμαστε στους επόμενους συλλογισμούς: Έστω $x \in C \neq \emptyset$. Τότε

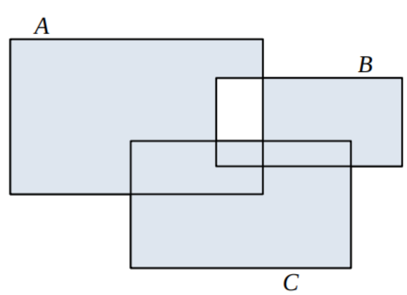
$$x \in C \implies x \in (A \setminus B) \cup C$$
$$x \in C \implies x \in B \cup C \implies x \notin (A \cup C) \setminus (B \cup C)$$

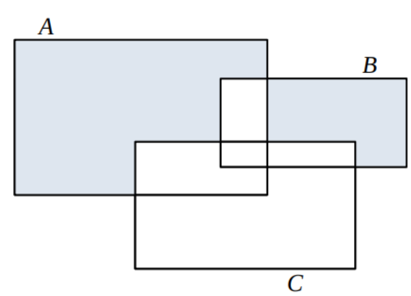
και τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην ειδική περίπτωση $C = \emptyset$, η ισότητα ισχύει:

$$(A \setminus B) \cup \emptyset = A \setminus B = (A \cup \emptyset) \setminus (B \cup \emptyset)$$

(ii) Τώρα βλέπουμε αριστερά το σύνολο $(A \triangle B) \cup C$ και δεξιά το

$$\begin{aligned}(A \cup C) \triangle (B \cup C) &= (A \cup B \cup C) \setminus [(A \cup C) \cap (B \cup C)] \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus [(A \cap B) \cup C].\end{aligned}$$





Πάλι διαφέρουν κατά το σύνολο C. Οπότε θεωρούμε ένα $x \in C \neq \emptyset$. Τότε

$$\begin{aligned} &x \in C \implies x \in (A \triangle B) \cup C \\ &x \in C \implies x \in (A \cap B) \cup C \implies x \notin (A \cup C) \triangle (B \cup C) \end{aligned}$$

και τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.
Στην ειδική περίπτωση $C = \emptyset$, η ισότητα προφανώς ισχύει:

$$(A \triangle B) \cup \emptyset = A \triangle B = (A \cup \emptyset) \triangle (B \cup \emptyset).$$

15. Να υπολογιστεί η παράσταση $(A \triangle B) \triangle A$.

Απάντηση. Εφαρμόζοντας την μεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα της συμμετρικής διαφοράς, έχουμε

$$(A \triangle B) \triangle A = (B \triangle A) \triangle A = B \triangle (A \triangle A) = B \triangle \emptyset = B.$$

16. Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα χρησιμοποιώντας μόνο ενώσεις, τομές και συμπληρώματα των A, B: (i) $A \triangle E$, (ii) $A \triangle (A \cup B)$, (iii) $A \triangle (A \cap B)$, (iv) $A \triangle (A \setminus B)$, ($v$) $A \triangle A^c$.

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι:
(i) $A \triangle E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = A^c$.
(ii) $A \triangle (A \cup B) = [A \setminus (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \setminus A] = \emptyset \cup [(A \cup B) \cap A^c]$
$= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset \cup (B \cap A^c) = B \cap A^c$.
(iii) $A \triangle (A \cap B) = [A \cup (A \cap B)] \setminus [A \cap (A \cap B)]$
$= A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = A \cap B^c$
(iv) $A \triangle (A \setminus B) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup [(A \setminus B) \setminus A] = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$
(v) $A \triangle A^c = (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) = E \setminus \emptyset = E$.

17. Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(i) $A \triangle X = A^c$
(ii) $A \triangle X = A \cap B$
(iii) $A \triangle X = A \cup B$
(iv) $A \triangle X = A \setminus B$
(v) $A \triangle X = E$

Απάντηση. Παίρνοντας συμμετρική διαφορά κάθε μέλους των ισοτήτων με το A, και λαμβάνοντας υπόψιν τους υπολογισμούς της προηγούμενης άσκησης, ότι $A \triangle A = \emptyset$ και ότι $\emptyset \triangle X = X$, έχουμε

(i) $A \triangle X = A^c \implies X = A \triangle A^c = E$

(ii) $A \triangle X = A \cap B \implies X = A \triangle (A \cap B) = A \cap B^c = A \setminus B$

(iii) $A \triangle X = A \cup B \implies X = A \triangle (A \cup B)$

$\implies X = [A \cup (A \cup B)] \setminus [(A \cup B) \cap A]$

$\implies X = (A \cup B) \setminus A = B \setminus A$

(iv) $A \triangle X = A \setminus B \implies X = A \triangle (A \setminus B) = A \cap B$

(v) $A \triangle X = E \implies X = A \triangle E = A^c$

18. Έστω A, B σύνολα. Να δείξετε ότι $A = B$ αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο X με τις ιδιότητες

$$A \cup X = B \cup X \quad \text{και} \quad A \cap X = B \cap X.$$

Απάντηση. Αν $A = B$, για κάθε σύνολο X ισχύουν οι ισότητες. Για το αντίστροφο, έστω ότι υπάρχει τέτοιο σύνολο X. Θα δείξουμε ότι $A = B$.
Λύση 1. Έστω $x \in A$. Τότε

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup X = B \cup X \Rightarrow x \in B \vee x \in X.$$

Αν $x \in B$, τότε $A \subseteq B$. Αν $x \in X$, τότε

$$x \in X \Rightarrow x \in A \cap X = B \cap X \Rightarrow x \in B$$

Οπότε πάλι $A \subseteq B$. Ανάλογα δείχνουμε ότι και $B \subseteq A$.
Λύση 2. Από την υπόθεση ότι ισχύουν οι δύο ισότητες, προκύπτει

$$\begin{aligned}
&(A \cup X) \setminus (A \cap X) = (B \cup X) \setminus (B \cap X) \Rightarrow \\
&A \triangle X = B \triangle X \Rightarrow \\
&(A \triangle X) \triangle X = (B \triangle X) \triangle X \Rightarrow \\
&A \triangle (X \triangle X) = B \triangle (X \triangle X) \Rightarrow \\
&A \triangle \emptyset = B \triangle \emptyset \Rightarrow \\
&A = B.
\end{aligned}$$

19. Βρείτε την τομή και την ένωση των παρακάτω οικογενειών συνόλων, με σύνολο δεικτών A:

(i) $A = \{1, 2, \dots, n\}$ και $S_a = [0, a+1]$, $a \in A$.
(ii) $A = \mathbb{N}$ και $S_n = (0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι $\forall\ a \in A = \{1, 2, \dots, n\}$,

$$S_1 = [0, 2] \subseteq S_a = [0, a+1] \subseteq [0, n+1] = S_n.$$

Από τον πρώτο εγκλεισμό προκύπτει ότι $S_1 \subseteq \bigcap_{a\in A} S_a$. Όμως, επειδή το S_1 είναι ένα από τα σύνολα που τέμνονται, $\bigcap_{a\in A} S_a \subseteq S_1$. Άρα

$$\bigcap_{a\in A} S_a = S_1 = [0, 2].$$

Από τον δεύτερο εγκλεισμό προκύπτει ότι $\bigcup_{a\in A} S_a \subseteq S_n$. Από την άλλη μεριά, το S_n είναι ένα από τα σύνολα της ένωσης, επομένως $S_n \subseteq \bigcup_{a\in A} S_a$. Άρα

$$\bigcup_{a\in A} S_a = S_n = [0, n+1].$$

(i) Παρόμοια, παρατηρούμε ότι $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = (0, 1/n) \subseteq S_1 = (0, 1),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \subseteq S_1$, κι επειδή το S_1 είναι ένα από τα σύνολα που ενώνονται, $S_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, άρα

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = S_1 = (0, 1).$$

Σχετικά με την τομή, ισχυριζόμαστε ότι αυτή είναι κενή: πράγματι,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n &\Longrightarrow\ x \in (0, 1/n), \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow\ 0 < x < 1/n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow\ 0 < n < 1/x, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

δηλ. $\mathbb{N}$ άνω φραγμένο από το $1/x$, άτοπο. Άρα

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \emptyset.$$