

Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης

8 Σεπτεμβρίου 2026

Θέμα 1ο.

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

(α) (i) Έστω A, B σύνολα. Να ορίσετε τη συμμετρική διαφορά $A \Delta B$.

(ii) Να υπολογίσετε το σύνολο $\mathbb{Z} \Delta (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

(β) Έστω A, B, C, D σύνολα. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις:

$$(i) \quad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(ii) \quad (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Θέμα 2ο.

(1, 2 + 0, 6 + 1, 2 = 3 μον.)

(α) Έστω X, Y σύνολα, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ και $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση. Να ελέγξετε αν ισχύουν οι ισότητες $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ και $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(β) Αν $f^{-1}(f(A)) = A$, για κάθε $A \subseteq X$, τι συμπεραίνετε για την f ;

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $A = [-1, 1]$ και $B = [1, 3]$, να υπολογίσετε την εικόνα $f(A)$ και την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$.

Θέμα 3ο.

((3 × 0, 6) + 1, 2 = 3 μον.)

(α) Στο σύνολο $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση ρ ως εξής:

$$(a, m) \rho (b, n) \Leftrightarrow a \cdot n = b \cdot m.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ρ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A .

(ii) Να βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του ζεύγους $(1, 2)$.

(iii) Να ορίσετε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της ρ στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

(β) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να εξετάσετε για ποιους φυσικούς αριθμούς n ισχύει η ανισότητα: $3^n > 2n^3$.

Θέμα 4ο.

(0, 9 + (3 × 0, 7) = 3 μον.)

(α) Να αποδείξετε με βάση τους ορισμούς ότι το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο.

(β) Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα να εξετάσετε αν είναι πεπερασμένο, άπειρο αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

$$K = \{x \in [0, 1] : x = \frac{m}{n}, \text{ με } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \text{ και } m < 10\}.$$

$$L = \{x \in [0, 1] : x = \frac{m}{n}, \text{ με } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \text{ και } n < 10\}.$$

$$M = \{A \subset \mathbb{N} : \min A \geq 10\}.$$

Καλή επιτυχία!