**ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**
**02/02/2026**

**ΘΕΜΑ 1.** $(1,5 + 1,5 = 3$ μον.$)$

Έστω $A$, $B$, σύνολα.

(α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες:

(i) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.

(ii) $A \setminus B = A \triangle B \iff B \subseteq A$.

(β) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες:

(i) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(iii) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

**ΘΕΜΑ 2.** $(1,5 + 1,5 = 3$ μον.$)$

(α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = |t|$ και $g(x) = [x]$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του $x$. Να υπολογίσετε τα σύνολα $f([-1,2])$, $f^{-1}([1,4])$, $g((-1,1))$ και $g^{-1}((-1,3))$.

(β) Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αριστερά ή/και δεξιά αντιστρέψιμες. Για όσες είναι, να υπολογίσετε μια αντίστοιχη αντίστροφη.

(i) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty) : f_1(x) = e^x$.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, +\infty) : f_2(x) = x^2 - 1$.

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f_3(x) = \cos x$.

**ΘΕΜΑ 3.** $(1 + 1 + 1 = 3$ μον.$)$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δίνεται η διμελής σχέση

$$xRy \iff x - [x] = y - [y],$$

όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του $x$.

(α) Να δείξετε ότι η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Αν $< x >_R$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας του $x$ ως προς την σχέση $R$, να υπολογίσετε την κλάση $< 3/5 >_R$ του $3/5$ και την ισχύ (πληθικότητά) της.

(γ) Να βρείτε την ισχύ του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\{< x >_R : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

**ΘΕΜΑ 4.** $(0,9 + 2,1 = 3$ μον.$)$

(α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε **περιττό** φυσικό $n$, ο 15 διαιρεί τον $4^n + 5^n + 6^n$.

(β) Να εξετάσετε αν είναι **αληθής ή ψευδής** καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. (Με $|A|$ συμβολίζουμε την ισχύ του συνόλου $A$.)

(i) Δίνεται ένα σύνολο $A$. Αν, για κάθε $B \subset A$ με $A \neq B$ ισχύει $|B| < |A|$, τότε το $A$ είναι πεπερασμένο.

(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq C$ και $|A| = |C|$, τότε $|A| = |B|$.

(iii) Υπάρχει σύνολο $A$ με την ιδιότητα, το δυναμοσύνολό του, $\mathcal{P}(A)$, να είναι άπειρο αριθμήσιμο.

*Καλή επιτυχία!*