

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

01/02/2021

ΟΜΑΔΑ Α

1. (α) Έστω A, B, C σύνολα. Να εξετάσετε αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$A \cup B \subseteq A \cup C \Rightarrow B \subseteq C.$$

Αν ναι, αποδείξτε την. Αν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

(β) Δίνονται δύο μη κενά σύνολα X, Y και έστω $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$. Αν $(A \times B)^c$ είναι το συμπλήρωμα του $A \times B$ στο $X \times Y$, τότε:

(β₁) Αποδείξτε ότι $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$.

(β₂) Αν $X = Y = \mathbb{R}$ και $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, σχεδιάστε τα σύνολα $(A \times B)^c$ και $A^c \times B^c$ και δείξτε με τη βοήθεια του σχήματος ότι δεν ισχύει η ισότητα $A^c \times B^c = (A \times B)^c$.

2. Στο επίπεδο \mathbb{R}^2 ορίζουμε τη σχέση S ως εξής:

$$(\alpha, \beta) S (\gamma, \delta) \iff \beta = \delta.$$

(α) Δείξτε ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας στο \mathbb{R}^2 .

(β) Περιγράψτε γεωμετρικά τις κλάσεις ισοδυναμίας.

3. Δίνονται τρία μη κενά σύνολα A, B, C και μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$.

(α) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη η συνεπαγωγή:

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \implies g_1 = g_2,$$

όπου οι g_1, g_2 είναι συναρτήσεις από το B στο C .

(β) Ποια από τις παρακάτω υποθέσεις εξασφαλίζει ότι η συνεπαγωγή του ερωτήματος (α) είναι σωστή:

(i) Η f είναι 1-1.

(ii) Η f είναι επί του B .

Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.