

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

01/02/2021

ΟΜΑΔΑ Β

1. Έστω A, B, C σύνολα.

(α) Να εξετάσετε αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$A \cap B \subseteq A \cap C \Rightarrow B \subseteq C.$$

Αν ναι, αποδείξτε την. Αν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

(β) Να δείξετε ότι

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

Να βρείτε ένα παράδειγμα μη κενών συνόλων που να ισχύει η ισότητα και ένα παράδειγμα που να ισχύει ο γνήσιος εγκλεισμός.

2. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ορίζουμε τη σχέση S ως εξής:

$$(\alpha, \beta) S (\gamma, \delta) \iff \alpha\delta = \beta\gamma.$$

(α) Δείξτε ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(β) Περιγράψτε γεωμετρικά τις κλάσεις ισοδυναμίας.

3. Δίνονται τρία μη κενά σύνολα A, B, C και μία συνάρτηση $f : B \rightarrow C$.

(α) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη η συνεπαγωγή:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies g_1 = g_2,$$

όπου οι g_1, g_2 είναι συναρτήσεις από το A στο B .

(β) Ποια από τις παρακάτω υποθέσεις εξασφαλίζει ότι η συνεπαγωγή του ερωτήματος (α) είναι σωστή:

(i) Η f είναι 1-1.

(ii) Η f είναι επί του C .

Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.