Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_m$

Έστω $m \in \mathbb{N}$ ένας φυσικός αριθμός.
Στό σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ορίζουμε τήν διμελή σχέση $R_m \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ως ακολούθως:

$$(x,y)\in R_m \Leftrightarrow x,y\in\mathbb{Z} \text{ και } x-y=k.m \text{ για } k\in\mathbb{Z}.$$

Συνήθως γράφουμε $x\equiv y(\mathrm{mod}\, m)$ αντί $(x,y)\in R_m$.

Πρόταση
Η σχέση R_m στο $\mathbb{Z}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη
(i) $(x,x)\in R_m$ για κάθε $x\in\mathbb{Z}$, διότι $x-x=0m$.
(ii) Αν $(x,y)\in R_m \Leftrightarrow x-y=k.m$ για $k\in\mathbb{Z}$, τότε
$(y,x)\in R_m \Leftrightarrow y-x=(-k).m$ και $-k\in\mathbb{Z}$.
(iii) Αν $(x,y)\in R_m \Leftrightarrow x-y=km$ για $k\in\mathbb{Z}$ και
$(y,z)\in R_m \Leftrightarrow y-z=\lambda m$ για $\lambda\in\mathbb{Z}$
τότε $(x,z)\in R_m$,
αφού $x-z=(x-y)+(y-z)=km+\lambda m=(k+\lambda)m$, $k+\lambda\in\mathbb{Z}$.

Μάλιστα θα έχουμε m το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας:
Πράγματι, κάθε ακέραιος αριθμός a έχει τήν μορφή $a=km+u$ όπου $k\in\mathbb{Z}$ και $0\leq u<m$, δηλαδή $u\in\{0,1,\dots,m-1\}$.
($\pi.\chi.$ $-5=2(-3)+1$, $k=-3$, $m=2$)

Θα αποδείξουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι:

$[0]_m=\{a\in\mathbb{Z} : a=k.m \text{ για } k\in\mathbb{Z}\}$
$[1]_m=\{a\in\mathbb{Z} : a=km+1 \text{ για } k\in\mathbb{Z}\}$
$\vdots$
$[m-1]_m=\{a\in\mathbb{Z} : a=km+(m-1) \text{ για } k\in\mathbb{Z}\}$

Συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας με $\mathbb{Z}_m$. Οπότε

$$\mathbb{Z}_m=\{[0]_m,[1]_m,\dots,[m-1]_m\}$$

Κάθε ακέραιος αριθμός a γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $a = km + u$ όπου $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ και $u \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.
(π.χ. αν $m = 3$ και $a = -5$, τότε $-5 = (-2)3 + 1$
αν $m = 2$ $\quad -5 = (-3)\cdot 2 + 1$.)

<u>Πρόταση</u> Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε
$x \equiv y \pmod{m} \underset{\text{ορισμός}}{\iff} (x,y) \in R_m \iff x - y = km$ για $k \in \mathbb{Z}$
$\iff$ οι x, y διαιρούμενοι με το m δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, έστω $u \in \mathbb{Z}$ ώστε $0 \leq u \leq m-1$.

<u>Απόδειξη</u>

$(\Rightarrow)$ Έστω $(x,y) \in R_m \iff x, y \in \mathbb{Z}$ και $x - y = km$ για $k \in \mathbb{Z}$
Διαιρώντας τους x, y με το m έχουμε:
$x = k_1 \cdot m + u_1 \quad 0 \leq u_1 \leq m-1, \; k_1 \in \mathbb{Z},$
$y = k_2 m + u_2 \quad 0 \leq u_2 \leq m-1, \; k_2 \in \mathbb{Z}.$

Άρα, $x - y = (k_1 - k_2)m + (u_1 - u_2)$
όπου $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$, και
$-(m-1) \leq u_1 - u_2 \leq m-1$, αφού $0 \leq u_1 \leq m-1$ και $1-m \leq -u_2 \leq 0$

Επίσης, αφού $x - y = k.m$, (υπόθεση).
έχουμε ότι $u_1 - u_2 = \lambda . m$ για $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Επομένως $-m < -(m-1) \leq \lambda \cdot m \leq m-1 < m$, $\lambda . m \in \mathbb{Z}$,
οπότε αναγκαστικά $\lambda = 0$.

Άρα, $u_1 - u_2 = 0 \iff u_1 = u_2$

$(\Leftarrow)$
Αν x, y διαιρούμενοι με το m δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε:
$x = km + u$ και $y = \lambda m + u$, $0 \leq u \leq m-1$ $k, \lambda \in \mathbb{Z}$.
οπότε $x - y = (k - \lambda)m$, $k - \lambda \in \mathbb{Z}$.

Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τόσες όσα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης με το m, δηλαδή
$[0]_m = \{k.m : k \in \mathbb{Z}\}$, $[1]_m = \{k.m + 1 : k \in \mathbb{Z}\} \dots [m-1]_m = \{km + (m-1) : k \in \mathbb{Z}\}$

Στο σύνολο $\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$ (12)
ορίζονται οι πράξεις τις πρόσθεσης
και του πολλαπλασιασμού ως ακολούθως:

$$+\cdot \ \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$$

$$([x]_m, [y]_m) \to [x]_m + [y]_m = [x+y]_m$$

$$([x]_m, [y]_m) \to [x]_m \cdot [y]_m = [x \cdot y]_m$$

π. χ. Αν $m=3$, $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3)$

και $[1]_3 + [2]_3 = [3]_3 = [0]_3 = [2]_3 + [1]_3$

$$[2]_3 + [2]_3 = [4]_3 = [1]_3$$

$$[1]_3 \cdot [2]_3 = [2]_3 = [2]_3 \cdot [1]_3$$

$$[2]_3 \cdot [2]_3 = [4]_3 = [1]_3$$

$$[x]_3 \cdot [1]_3 = [x]_3 = [x]_3 + [0]_3$$

Μάθημα 6
Σχέσεις διάταξης

Ορισμός
Έστω σύνολο $X \neq \phi$. Μια σχέση $R \subseteq X \times X$ στο X λέγεται σχέση διάταξης αν είναι:

(i) ανακλαστική, (ή αυτοπαθής), δηλαδή αν:
$$(x,x) \in R \Leftrightarrow xRx \quad \text{για κάθε } x \in X$$
(ii) αντισυμμετρική, δηλαδή αν:
$$(x,y) \in R \text{ και } (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$
(iii) μεταβατική, δηλαδή αν
$$(x,y) \in R \text{ και } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

Παραδείγματα
(α) Έστω $X \neq \phi$ ένα σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο. Η σχέση εγκλεισμού στο $\mathcal{P}(X)$, δηλαδή το σύνολο
$$R_{\subseteq} = \{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$
είναι σχέση διάταξης στο $\mathcal{P}(X)$ διότι:

(i) $(A,A) \in R_{\subseteq}$ για κάθε $A \in \mathcal{P}(X)$, διότι $A \subseteq A$.

(ii) Αν $(A,B) \in R_{\subseteq}$ και $(B,A) \in R_{\subseteq}$ τότε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ και επομένως $A = B$.

(iii) Αν $(A,B) \in R_{\subseteq}$ και $(B,\Gamma) \in R_{\subseteq}$, δηλαδή $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$, οπότε $(A,\Gamma) \in R_{\subseteq}$

(β) Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.
Η σχέση της διαιρετότητας
$$R_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x | y\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
είναι σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}$ διότι:

(i) $x|x \ \forall x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x,x) \in R_\delta \ \forall x \in X$

(ii) Αν $x|y$ και $y|x$ για $x, y \in \mathbb{N}$, τότε $x = y$

(iii) Αν $x|y$ και $y|z$, τότε $y = \kappa x$, $\kappa \in \mathbb{N}$ και $z = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{N}$, οπότε $z = (\lambda \cdot \kappa) x$, άρα $x | z$.

(γ) Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών 14

Η σχέση $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\leq y\}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ είναι σχέση διάταξης στο $\mathbb{R}$, διότι:

(i) $(x,x)\in R$, αφού $x=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ii) Αν $(x,y)\in R \Leftrightarrow \boxed{x\leq y}$ και $(y,x)\in R\Leftrightarrow \boxed{y\leq x}$ τότε $x=y$.

(iii) Αν $(x,y)\in R$ και $(y,z)\in R$, τότε $x\leq y$ και $y\leq z$, άρα $x\leq z$, δηλαδή $(x,z)\in R$.

Άρα η σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$ είναι σχέση διάταξης

(δ) Η σχέση $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x<y\}$ δεν είναι σχέση διάταξης στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, διότι $(x,x)\notin R_1$ για $x\in\mathbb{R}$.

<u>Ορισμός</u>

Μια σχέση διάταξης $R\subseteq X\times X$ λέγεται **ολική διάταξη** αν: **για κάθε $x,y\in X$** ισχύει:

είτε $(x,y)\in R$ είτε $(y,x)\in R$.

Για παράδειγμα οι προαναφερόμες σχέσεις:

(α) Αν $X=\{a\}$ είναι μονοσύνολο, τότε $\mathcal{P}(X)=\{\varnothing,\{a\}\}$,

και $R_{\subseteq}=\{(\{a\},\{a\}),(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{a\})\}$.

Άρα, είναι ολική διάταξη

Αν X **δεν** είναι μονοσύνολο, και άρα περιέχει δύο στοιχεία διαφορετικά, έστω $a,b\in X$ με $a\neq b$, τότε **δεν** είναι ολική η διάταξη $R_{\subseteq}$, διότι για

$\{a\}\in\mathcal{P}(X)$, $\{b\}\in\mathcal{P}(X)$

$(\{a\},\{b\})\notin R_{\subseteq}$ και $(\{b\},\{a\})\notin R_{\subseteq}$

(β) Η σχέση $R_\delta=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x\mid y\}$ **δεν** είναι ολική διάταξη, διότι για $x=2$, $y=3$

$(2,3)\notin R_\delta$ και $(3,2)\notin R_\delta$

(γ) Η σχέση $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\leq y\}$ είναι **ολική** διάταξη, διότι $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει

είτε $x\leq y \Leftrightarrow (x,y)\in R$

είτε $y\leq x \Leftrightarrow (y,x)\in R$.

<u>Ορισμός</u> έστω ένα σύνολο $X \neq \Psi$
Μια σχέση $R \subseteq X \times X$ λέγεται αυστηρή διάταξη αν:
(i) $(x,x) \notin R$ για κάθε $x \in X$.
(ii) Αν $(x,y) \in R$, τότε $(y,x) \notin R$.
(iii) Αν $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$, τότε $(x,z) \in R$ (μεταβατική ιδιότητα).

Παρατηρούμε ότι μια σχέση R που είναι αυστηρή διάταξη στο X δεν είναι σχέση διάταξης, διότι δεν είναι ανακλαστική, μάλιστα $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \cap R = \phi$.
Ενώ για μια σχέση R στο X που είναι διάταξη ισχύει $\Delta_X \subseteq R$, δηλαδή είναι ανακλαστική.

<u>Πρόταση</u> Έστω ένα σύνολο $X \neq \phi$. Τότε:
(α) Κάθε σχέση διάταξης $R \subseteq X \times X$ ορίζει μία αυστηρή διάταξη $S = R \setminus \Delta_X$ στο X
(β) Κάθε σχέση αυστηρής διάταξης $S \subseteq X \times X$ ορίζει μία σχέση διάταξης $R = S \cup \Delta_X$
<u>Απόδειξη</u>
(α) Έστω $R \subseteq X \times X$ μια σχεση διάταξης στο X
Ορίζουμε $S = R \setminus \Delta_X$.
Η S είναι αυστηρή διάταξη στο X, διότι:
(i) $(x,x) \notin S$ για κάθε $x \in X$, διότι $\Delta_X \cap S = \phi$
(ii) Αν $(x,y) \in S$, τότε $x \neq y$, διότι $\Delta_X \cap S = \phi$
Επίσης, $(y,x) \notin S$, διότι αν $(y,x) \in S$, τότε, αφού $(x,y) \in S$ και $(y,x) \in S$ θα ίσχυε $(x,y) \in R$ και $(y,x) \in R$ και $x \neq y$
Άτοπο, διότι η R είναι σχέση διάταξης.
Άρα, αν $(x,y) \in S$, τότε $(y,x) \notin S$.
(iii) Έστω $(x,y) \in S$ και $(y,z) \in S$. Τότε $x \neq y$, $y \neq z$, $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$. Άρα $(x,z) \in R$, αφού η R είναι σχέση διάταξης.
Επίσης $x \neq z$, διότι αν $x = z$, τότε, θα είχαμε από τις αρχικές υποθέσεις $(x,y) \in R$ και $(y,x) \in R$, άρα $x = y$.
Άτοπο!
Άρα, $(x,z) \in R$ και $x \neq z$, οπότε $(x,z) \in S$.

(β) Έστω $S \subseteq X \times X$ μια αυστηρή διάταξη στο X.
Ορίζουμε $R = S \cup \Delta_X \subseteq X \times X$
Η R είναι διάταξη στο X διότι:
(i) $(x,x) \in R$ για κάθε $x \in X$, διότι $(x,x) \in \Delta_X \subseteq R$
(ii) Αν $(x,y) \in R$ και $(y,x) \in R$, τότε
$((x,y) \in S$ ή $x=y)$ και $((y,x) \in S$ ή $x=y)$
Άρα, $((x,y) \in S$ και $(y,x) \in S)$ ή $x=y$
διότι η S είναι αυστηρή διάταξη
(Αν $(x,y) \in S$ και $(y,x) \in S$ τότε $(x,x) \in S$, Ατοπο!
διότι η S είναι αυστηρή διάταξη.
Άρα $x=y$.)
(iii) Έστω $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$. Τότε
$((x,y) \in S$ ή $x=y)$ και $((y,z) \in S$ ή $y=z)$

$\Rightarrow ((x,y) \in S$ και $(y,z) \in S)$ ή
$((x,y) \in S$ και $y=z)$ ή
$(x=y$ και $(y,z) \in S)$ ή
$(x=y$ και $y=z)$

$\Rightarrow (x,z) \in S$ ή $(x,z) \in S$ ή $(x,z) \in S$ ή $x=z$,

$\Rightarrow (x,z) \in S$ ή $x=z$

$\Rightarrow (x,z) \in S \cup \Delta_X = R$

Άρα η σχέση R είναι σχέση διάταξης στο X.

<u>Ορισμός</u>
Μια αυστηρή διάταξη λέγεται τριχοτομία αν:
για καθε $x,y \in X$ ισχύει ακριβώς μία απο τις παρακάτω περιπτώσεις:
$(x,y) \in S$, $(y,x) \in S$, $x=y$.

Ασκήσεις 16 εως 22.

Θα ορίσουμε μια ολική διάταξη στο σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Έστω $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ και $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Ορίζουμε $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2)$ ή $(x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2)$

Η σχέση $\leq$ είναι διάταξη διότι:

(1) $(x, y) \leq (x, y)$, διότι $x = x$ και $y \leq y$

(2) Αν $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ και $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$

τότε $[x_1 < x_2$ ή $(x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2)]$ και

$[x_2 < x_1$ ή $(x_2 = x_1$ και $y_2 \leq y_1)]$

$\Longrightarrow [x_1 < x_2$ και $x_2 < x_1]$ ή $[x_1 < x_2$ και $x_2 = x_1$ και $y_2 \leq y_1]$

ή $[x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2$ και $x_2 < x_1]$

ή $[x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2$ και $y_2 \leq y_1]$

(Οι τρεις πρώτες δεν ισχύουν)

$\Longrightarrow [x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2] \Longrightarrow \boxed{(x_1, y_1) = (x_2, y_2)}$.

(3) Αν $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ και $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [x_1 < x_2$ ή $(x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2)]$ και

$[x_2 < x_3$ ή $(x_2 = x_3$ και $y_2 \leq y_3)]$

$\Longrightarrow [x_1 < x_2$ και $x_2 < x_3]$

ή $[x_1 < x_2$ και $x_2 = x_3$ και $y_2 \leq y_3]$

ή $[(x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2)$ και $x_2 < x_3]$

ή $[(x_1 = x_2$ και $y_1 \leq y_2)$ και $(x_2 = x_3$ και $y_2 \leq y_3]$

(από τις τρεις πρώτες συνεπάγεται ότι:

$x_1 < x_3$

και από την τέταρτη συνεπάγεται ότι:

$x_1 = x_3$ και $y_1 \leq y_3$)

$\Longrightarrow [x_1 < x_3$ ή $(x_1 = x_3$ και $y_1 \leq y_3)]$

$\Longrightarrow ((x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$

Άρα η σχέση $\leq$ είναι διάταξη στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

και μάλιστα ολική διάταξη διότι:

Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Τότε είτε $x_1 < x_2$ είτε $x_1 = x_2$ είτε $x_2 < x_1$

Αν $x_1 < x_2$, τότε $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$.

Αν $x_1 > x_2$ τότε $(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2)$.

Αν $x_1 = x_2$ και $y_1 \geq y_2$ $(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2)$.