Ασκήσεις (4 – 15)
Σχέσεις (ισοδυναμίας)

(2.7) 4. Έστω οι σχέσεις ρ, σ στο $\mathbb{N}$:

$\rho = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \alpha|\beta$ (ο α διαιρέτης του $\beta\}$

$\sigma = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \alpha^2|\beta$ (ο α^2 διαιρέτης του $\beta\}$

$\rho\cup\sigma = \rho$, $\rho\cap\sigma = \sigma$,

$\rho\setminus\sigma = \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \alpha|\beta$ και α^2 δεν διαιρεί το $\beta\}$

$= \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \beta = \alpha.\kappa$ για $\kappa\in\mathbb{N}$ και α δεν διαίρει $\kappa\}$

$\sigma\setminus\rho = \emptyset$

5. Εξετάστε αν καθε μια απο τις παρακάτω σχέσεις στο $\mathbb{R}$ είναι (α) ανακλαστική, (β) συμμετρική, (γ) μεταβατική

(iii) $|x-y|\leq 1$, είναι ανακλαστική ($|x-x|=0<1$)
είναι συμμετρική ($|x-y|\leq 1 \Leftrightarrow |y-x|\leq 1$)
δεν είναι μεταβατική ($|3{,}5-3|\leq 1$, $|3-2|\leq 1$ και $|3{,}5-2|>1$)

(iv) $|x-y|\leq 0$, Για $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:
$|x-y|\leq 0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$ (ισχύουν (α), (β), (γ))

(v) $x-y\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών)
Ειναι ανακλαστική διότι $x-x=0\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Είναι συμμετρική, διότι αν $x-y\in\mathbb{Q}$, τότε $y-x\in\mathbb{Q}$
Ειναι μεταβατική, διότι αν $x-y\in\mathbb{Q}$ και $y-z\in\mathbb{Q}$
τότε $x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Q}$

(vi) $x-y\notin\mathbb{Q}$
Δεν είναι ανακλαστική ($0\in\mathbb{Q}$), είναι συμμετρική
δεν είναι μεταβατική ($\sqrt{2}-1)\notin\mathbb{Q}$, $1-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$)

6. $A=\{(x,x) : x\in X\}$. Έχουμε $A\subseteq\rho$ και $A\subseteq\sigma$. Άρα και
$A\subseteq\rho\cup\sigma$, $A\subseteq\rho\cap\sigma$.

7. Έχουμε $\rho=\rho^{-1}$, $\sigma=\sigma^{-1}$. Άρα, $\overset{\rho^{-1}\cup\sigma^{-1}}{\overset{\|}{\rho\cup\sigma}} = \overset{\rho^{-1}\cup\sigma^{-1}}{\overset{\|}{(\rho\cup\sigma)^{-1}}}$, $(\rho\cap\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\cap\sigma^{-1} = \rho\cap\sigma$

8 σ μια σχέση στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (δηλαδή $\sigma \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$((m,n),(r,s)) \in \sigma \Leftrightarrow (m,n)\sigma(r,s) \Leftrightarrow m+s=n+r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m-n=r-s$

Η σ είναι σχέση ισοδυναμίας:

Η σ είναι ανακλαστική διότι:

Για κάθε $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ισχύει $(m,n)\sigma(m,n) \Leftrightarrow m+n=n+m$

Η σ είναι συμμετρική διότι:

Για κάθε $(m,n),(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ισχύει:

$(m,n)\sigma(r,s) \Leftrightarrow m+s=n+r \Leftrightarrow r+n=s+m \Leftrightarrow (r,s)\sigma(m,n)$

Η σ είναι μεταβατική διότι:

Αν $(m,n)\sigma(r,s)$ και $(r,s)\sigma(\kappa,\ell) \Leftrightarrow m+s=n+r$ και $r+\ell=s+\kappa$

Τότε $m+s+r+\ell=n+r+s+\kappa$. Άρα $m+\ell=n+\kappa$

Επομένως, $(m,n)\sigma(\kappa,\ell)$

Άρα η σ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παρατηρούμε ότι:

$(m,n)\sigma(r,s) \Leftrightarrow m+s=n+r \Leftrightarrow m-n=r-s \in \mathbb{Z}$

Άρα, η κλάση ισοδυναμίας ενός $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $m\geq n$ είναι

$[m-n,0]=[(m,n)]=\{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : r-s=m-n\}$, $m-n\in\mathbb{N}$.

Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας αντιστοιχούν στο σύνολο $\mathbb{Z}\cong\{[(n,0)] : n\in\mathbb{N}\}\cup\{[(0,n)] : n\in\mathbb{N}\}$

(Αν $n\geq m$, τότε $[(m,n)]=[0,n-m]$ $n-m\in\mathbb{N}$.)

9 Έστω η σχέση σ στο σύνολο $B=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$(m,n)\sigma(r,s) \Leftrightarrow m.s=n.r$ για $n,s\neq 0$

$(m,n)\sigma(m,n)$ για κάθε $(m,n)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ (ανακλαστική)

και $(m,n)\sigma(r,s) \Leftrightarrow (r,s)\sigma(m,n)$ (συμμετρική),

και Αν $(m,n)\sigma(r,s)$ και $(r,s)\sigma(\kappa,\ell)$,

$\boxed{m.s=n.r}$ και $\boxed{r.\ell=s.\kappa}$ για $n\neq 0, s\neq 0, \ell\neq 0$.

Τότε $m.s.r.\ell=n.r.s.\kappa$ άρα αφού $s\neq 0$

έχουμε $r.m.\ell=n.\kappa.r$ και αν $r\neq 0$, έχουμε

$(m,n)\sigma(\kappa,\ell)$ (μεταβατική)

Αν $r=0$, τότε $m.s=0$, $s\neq 0$, άρα $\boxed{m=0}$ και

επίσης $r.\ell=0$ ...

10. Έστω $A=\{1,2,3\}$ και $\sigma=\{(2,3),(3,2),(2,2),(3,3)\}$ μια σχέση στο A. $(\sigma \subseteq A\times A)$.
Η σχέση είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά όχι ανακλαστική.

Το λάθος είναι ότι αποδεικνύεται ότι $a\sim a$ μόνο για τα στοιχεία του A που υπάρχει στοιχείο $b\in A$ ώστε $a\sim b$ και όχι για όλα τα στοιχεία του A.

11. Η σωστή διατύπωση της 10.

12. Ορίζεται $x\equiv_4 y \Leftrightarrow$ υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ ώστε $x-y=4\kappa$
$x\equiv_6 y \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda\in\mathbb{Z}$ ώστε $x-y=6\lambda$
$x\equiv_{12} y \Leftrightarrow x\equiv_4 y \cap x\equiv_6 y \Leftrightarrow$ υπαρχει $\mu\in\mathbb{Z}$ ώστε $x-y=12\mu$

13. Στο σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$ μπορούμε να ορίσουμε τόσες διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας όσες είναι οι διαμερίσεις του A.
Δηλαδή 15.

14. ρ_1,ρ_2 σχέσεις ισοδυναμίας στο X και $\rho_1\subseteq\rho_2$
Τότε η διαμέριση Δ_1 είναι εκλέπτυνση της Δ_2
(τα στοιχεία της Δ_2 είναι ενώσεις στοιχείων της Δ_1)

15. Είναι σχέση ισοδυναμίας η σχέση στο X
«οι x και y έχουν τους ίδιους γονείς»
Δεν είναι σχέση ισοδυναμίας η σχέση στο X
«οι x και y έχουν τουλάχιστον ένα κοινό γονέα»
διότι δεν ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.