

**Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ**  
**Προβλήματα για τον διαγωνισμό επιλογής για τον SEEMOUS 2026**  
24 Ιανουαρίου 2026

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $n$  θετικός ακέραιος και  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  που ικανοποιεί την  $AA^* = A^2$ . Ναδειχθεί ότι  $A = A^*$ .

**Πρόβλημα 2.** Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}.$$

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $n$  θετικός ακέραιος και  $S_n$  το σύνολο όλων των ένα προς ένα και επί απεικονίσεων  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ . Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^n$  και το υποσύνολό του  $A := \{(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) : \sigma \in S_n\}$ , που περιέχει  $n!$  διανύσματα. Πόση είναι η διάσταση του χώρου που παράγει το  $A$  στον  $\mathbb{R}^n$ ;

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $[a, b]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $y = \lambda x + \mu$  η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα  $(a, f(a))$  και  $(b, f(b))$ . Αν

$$M := \max\{|f(x) - \lambda x - \mu| : x \in [a, b]\},$$

δείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $|f'(\xi)| \geq 2M/(b-a)$ .

**Πρόβλημα 5.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^n$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(α) Δείξτε ότι  $f(x) = x \int_0^1 e^{-xu \log u} du$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(β) Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.**

**Καλή επιτυχία!**

## Λύσεις

1. Είναι γνωστό ότι για κάθε  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ισχύει  $\text{tr}(CC^*) = \sum_{i,j=1}^n |C_{i,j}|^2$ . Για τον  $C := A - A^*$  έχουμε

$$CC^* = AA^* - A^2 - (A^*)^2 + A^*A = A^*A - (A^*)^2 = A^*A - AA^*.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την  $AA^* = A^2$ . Έπεται ότι  $\text{tr}(CC^*) = 0$ , άρα  $C = 0$ .

2. Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

$$\frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n+2}.$$

Γράφουμε  $H_k := \sum_{n=1}^k 1/n$  για κάθε  $k$  θετικό ακέραιο. Οπότε το  $k$ -οστό μερικό άθροισμα της δοσμένης σειράς είναι

$$\begin{aligned} 2H_k - 3 \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} \right) + 3 \sum_{n=1}^k \frac{1}{3n+3} \\ = 3H_k + \frac{1}{k+1} - 1 - 3H_{3k+3} + 3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ = -3(H_{3k+3} - H_k) + \frac{9}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -3 \log 3 + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Για το τελευταίο βήμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ότι  $H_k - \log k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \gamma$  (σταθερά Euler) ή να γράψουμε το  $H_{3k} - H_k$  ως άθροισμα Riemann της  $x \mapsto 1/x$  στο  $[1, 3]$ , δηλαδή

$$H_{3k} - H_k = \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{n=3k} \frac{1}{n/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

3. Ο παραγόμενος χώρος έχει διάσταση το πολύ  $n$  αφού είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$ , και θα δείξουμε ότι έχει διάσταση  $n$ .

Ένας κοπιαστικός τρόπος. Δείχνουμε ότι είναι διαφορετική από το 0 η ορίζουσα.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Άλλη λύση. Έστω  $\{e_j : j \in [n]\}$  η συνηθισμένη βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Για οποιοδήποτε  $k \in [n]$ , έχουμε ότι ο παραγόμενος χώρος περιέχει τα  $n-1$  διανύσματα της μορφής  $\{e_k - e_j : j \in [n], j \neq k\}$ . Άρα και το

$$(1, 2, 3, \dots, n) + \sum_{j=1}^n j(e_k - e_j) = (1 + 2 + \dots + n)e_k.$$

4. Υπάρχει  $c \in (a, b)$  ώστε  $g(c) = M$  (ακόμα και όταν  $M = 0$ ). Υπάρχουν  $\xi_1 \in (a, c)$ ,  $\xi_2 \in (c, b)$  ώστε  $g(c) - g(a) = g'(\xi_1)(c - a)$ ,  $g(b) - g(c) = g'(\xi_2)(b - c)$ . Τότε

$$|f'(\xi_1) - f'(\xi_2)| = |g'(\xi_1) - g'(\xi_2)| = |g(c)| \left( \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \right) \geq \frac{4M}{b-a}.$$

Η τελευταία ανισότητα ανάγεται στην  $x(1-x) \leq 1/4$  για  $x \in [0, 1]$ , που ισχύει. Το ζητούμενο  $\xi$  είναι ένα από τα  $\xi_1, \xi_2$ .

5. (α)

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( xu \log \frac{1}{u} \right)^k du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \int_0^1 \left( u \log \frac{1}{u} \right)^k du \quad (1)$$

Η αλλαγή σειράς άθροισης ολοκλήρωσης επιτρέπεται γιατί ικανοποιείται η συνθήκη του θεωρήματος Fubini. Δηλαδή,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| xu \log \frac{1}{u} \right|^k du = \int_0^1 e^{|x|u \log \frac{1}{u}} du \leq e^{|x|}.$$

Αυτό γιατί για κάθε  $u \in (0, 1)$  έχουμε  $u \log(1/u) \leq u(u^{-1} - 1) \leq 1$ .

Έπειτα, στο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (1), κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής  $v := \log 1/u$ , και το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^{\infty} (e^{-v}v)^k e^{-v} dv = \int_0^{\infty} v^k e^{-(k+1)v} dv = \frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

Και το ζητούμενο έπεται.

(β) Θεωρούμε αυθαίρετα  $c > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Χρησιμοποιούμε τη γραφή της  $f$  από το ερώτημα (α) και κόβουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στα διαστήματα  $[0, e^{-c}]$ ,  $[e^{-c}, e^{-1+\varepsilon}]$ ,  $[e^{-1+\varepsilon}, 1]$ . Για κάθε  $M > 0$  έχουμε

$$-f(-M) = \left( \int_0^{e^{-c}} + \int_{e^{-c}}^{e^{-1+\varepsilon}} + \int_{e^{-1+\varepsilon}}^1 \right) M e^{Mu \log u} du =: I_M + J_M + K_M.$$

Έχουμε εισάγει συντομογραφίες για τα τρία ολοκληρώματα. Θα δείξουμε ότι τα  $I_M, J_M$  είναι αμελητέα και ότι το  $K_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 1$ .

• Για το  $I_M$ . Χρησιμοποιούμε το ότι  $\log u \leq -c$  στο χωρίο ολοκλήρωσης. Οπότε

$$I_M \leq M \int_0^{e^{-c}} e^{-uMc} du \leq M \int_0^{\infty} e^{-uMc} du = \frac{1}{c}.$$

• Για το  $J_M$ . Ισχύει ότι  $a := \sup_{u \in [e^{-c}, e^{-1+\varepsilon}]} u \log u < 0$ , οπότε  $J_M \leq M e^{aM} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$ .

• Για το  $K_M$ . Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής  $v := (1-u)M$  και έχουμε

$$K_M = \int_0^{(1-e^{-1+\varepsilon})M} e^{(M-v) \log(1-v/M)} dv = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[0, (1-e^{-1+\varepsilon})M]}(v) e^{(M-v) \log(1-v/M)} dv.$$

Το όριο του ολοκληρωτέου για  $M \rightarrow \infty$  είναι  $e^{-v}$ . Δείχνουμε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (και επομένως  $K_M \rightarrow 1$ ). Για  $0 < v < (1 - e^{-1+\varepsilon})M$  ισχύει  $-v \log(1 - v/M) \leq v - \varepsilon v$ , οπότε ο ολοκληρωτέος φράζεται για κάθε  $v \in [0, \infty)$  από το

$$e^{-v+v-\varepsilon v} = e^{-\varepsilon v},$$

που είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση του  $v$ . Έπεται λοιπόν από την  $0 \leq -J_M - K_M - f(-M) = I_M$  ότι

$$0 \leq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \{-1 - f(-M)\} \leq \frac{1}{c}$$

με  $c > 0$  αυθαίρετο. Έπεται ότι  $\lim_{M \rightarrow \infty} f(-M) = -1$ .