

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Προβλήματα για τον διαγωνισμό επιλογής για τον IMC

30 Μαΐου 2026

Πρόβλημα 1. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \int_0^x f^2(t) dt = 1$. Να δειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} f(x) = c$ για κάποια σταθερά $c \in (0, \infty)$ η οποία και να προσδιοριστεί.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{i,j})$ με στοιχεία μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο το στοιχείο στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη του πίνακα $A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ είναι ίσο με μηδέν. Να δείξετε ότι υπάρχουν μη κενά και ξένα υποσύνολα X, Y του $\{1, 2, \dots, n\}$ με ένωση $X \cup Y = \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in X$ και κάθε $j \in Y$ να έχουμε $a_{i,j} = 0$.

Πρόβλημα 3. Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ και $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ώστε $AB - BA = C$, ο C μετατίθεται και με τον A και με τον B και δεν υπάρχει μη μηδενικός και γνήσιος υπόχωρος του \mathbb{C}^n ο οποίος να είναι αναλλοίωτος ως προς τον A και τον B . Δείξτε ότι $n = 1$.

Πρόβλημα 4. Έστω P ένα μη σταθερό μονικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $z_0 \in \mathbb{C}$ με $|z_0| = 1$ ώστε $|P(z_0)| \geq 1$.

Πρόβλημα 5. Έστω $n \in \mathbb{N}^+$. Επιλέγουμε $n + 1$ σημεία x_0, x_1, \dots, x_n στο $(0, 1)$. Κάθε σημείο επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφα στο $(0, 1)$ και οι $n + 1$ επιλογές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ονομάζουμε m_n την απόσταση του x_0 από το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ποια είναι η μέση τιμή της m_n ;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Λύσεις

1. Η σταθερά είναι η $c = 3^{-1/3}$. Θέτουμε $F(x) = \int_0^x f^2(t) dt$ για κάθε $x \geq 0$. Για μεγάλα x (έστω για όλα τα $x > A$ για κάποιο $A > 0$) ισχύει $f(x) > 0$. Η υπόθεση λέει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{F'(x)}F(x) = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow \infty} F^2(x)F'(x) = 1$. Για δεδομένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 > A$ τέτοιο ώστε $1 - \varepsilon \leq F^2(x)F'(x) \leq 1 + \varepsilon$ για κάθε $x \geq x_0$. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε ότι για κάθε $x > x_0$ ισχύει

$$(1 - \varepsilon)(x - x_0) \leq \frac{F^3(x)}{3} - \frac{F^3(x_0)}{3} \leq (1 + \varepsilon)(x - x_0).$$

Προκύπτει από εδώ ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F^3(x)}{x} = 3$, και αυτό δίνει άμεσα το ζητούμενο όριο.

2. Κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με κορυφές τα $1, 2, \dots, n$ και κατευθυνόμενες ακμές (i, j) (θα το γράφουμε και ως $i \rightarrow j$) για κάθε διατεταγμένο ζεύγος δεικτών τέτοιο ώστε $a_{i,j} > 0$.

Ισχυρισμός: Δεν υπάρχει μονοπάτι $1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow 2$ στο κατευθυνόμενο γράφημα.

Γιατί μπορούμε να έχουμε ότι στο μονοπάτι δεν επαναλαμβάνεται καποιος δεικτης, άρα $r \leq n - 2$ και $(A^{r+1})_{1,2} > 0$, που είναι άτοπο από την υπόθεση ($r + 1 \leq n - 1$).

Θέτουμε λοιπόν

$$X := \{k \in [n] : \text{υπάρχει μονοπάτι από το 1 το } k \text{ στο γράφημα}\} \cup \{1\},$$

$Y := [n] \setminus X$. Τα X, Y είναι μη κενά ($2 \in Y$) με ένωση το $[n]$. Έστω τώρα $i \in X, j \in Y$. Αν $a_{i,j} > 0$, τότε από τον ορισμό του X θα είχαμε ότι επίσης $j \in X$ (στο μονοπάτι που οδηγεί από το 1 στο i προσθέτουμε ακόμα ένα βήμα, το $i \rightarrow j$), άτοπο αφού $j \in [n] \setminus X$.

3. Έστω λ μία (μιγαδική) ιδιοτιμή του C . Τότε ο υπόχωρος $= \ker(C - \lambda I)$ του \mathbb{C}^n είναι μη μηδενικός και αφού ο C μετατίθεται με τους A και B ο W είναι αναλλοίωτος ως προς A και B . Άρα ο W είναι ο \mathbb{C}^n συνεπώς $C = \lambda I$. Αλλά αφού $n\lambda = \text{tr}(C) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$, θα έχουμε $C = 0$, άρα οι A, B μετατίθενται. Όπως παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μιγαδικοί a, b με $A = aI$ και $B = bI$. Αλλά τότε κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του \mathbb{C}^n είναι αναλλοίωτος ως προς A και B . Συνεπώς $n = 1$.

4. Έστω ότι $P(z) = z^n + Q(z)$ με Q κάποιο πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n - 1$ ή $Q = 0$. Αν δεν υπάρχει z_0 όπως στην εκφώνηση, θα ισχύει $|z^n + Q(z)| < 1 = |z^n| \leq |z^n| + |Q(z)|$ για κάθε z με $|z| = 1$. Από το θεώρημα του Rouché¹ πρέπει οι $z^n, Q(z)$ να έχουν το ίδιο πλήθος μηδενικών στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου. Άτοπο αφού η $Q(z)$ είναι ή 0 ή πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n - 1$.

Υπάρχουν και άλλες απλές λύσεις.

5. Τα σημεία ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$ και έχουμε $m_n := \min\{|x_0 - x_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$. Από γνωστό τύπο,

$$\mathbf{E}(m_n) = \int_0^\infty \mathbf{P}(m_n > t) dt = \int_0^1 \mathbf{P}(m_n > t) dt.$$

Υπολογίζουμε (δεσμεύουμε ως προς την τυχαία τιμή του σημείου x_0)

$$\mathbf{P}(m_n > t) = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(m_n > t | x_0)\} = \int_0^1 \mathbf{P}(|x_1 - x| > t)^n dx = 2 \int_0^{1/2} \mathbf{P}(|x_1 - x| > t)^n dx.$$

¹Conway. Functions of one complex variable. Δεύτερη έκδοση (1978). Κεφάλαιο V, §3.

Στην τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του προβλήματος. Έπειτα, για $x \in [0, 1/2]$,

$$\mathbf{P}(|x_1 - x| > t) = \begin{cases} 1 - 2t & \text{αν } t \in (0, x], \\ 1 - x - t & \text{αν } t \in (x, 1 - x], \\ 0 & \text{αν } t \in (1 - x, 1]. \end{cases}$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\mathbf{P}(m_n > t) = \frac{2}{n+1}(1-t)^{n+1} + \frac{n-1}{n+1}(1-2t)^{n+1} \mathbf{1}_{t < 1/2}.$$

Η μέση τιμή της m_n προκύπτει ότι είναι $(n+3)/\{2(n+1)(n+2)\}$.