

Προβλήματα Ανάλυσης – 8 και 9 Νοεμβρίου 2025

Άσκηση 1. Έστω $f \in C^2(a, b)$ με $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, η οποία ικανοποιεί την $f'(x) + f^2(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι $b - a \geq \pi$.

Άσκηση 2. Έστω $f \in C^1[a, b]$ με $f(a) = 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε

$$|f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι αν $a < b$ και

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \cdots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \cdots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$$

τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Άσκηση 4. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \cdot \ln(n-k)}.$$

Άσκηση 5. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{3}$.

Άσκηση 6. Ορίζουμε $F : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι 1-1 και βρείτε την εικόνα της F (το σύνολο τιμών της).

Άσκηση 7. (α) Έστω $(x_k)_{k=1}^\infty$ φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sqrt{k}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(x_k)_{k=1}^\infty$ θετικών πραγματικών αριθμών,

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{k=m}^\infty x_k^2 \right)^{1/2} \leq C \sum_{k=1}^\infty x_k.$$

Άσκηση 8. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Άσκηση 9. Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_0(x) = g(x)$ και

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_n(t) dt, \quad x \in (0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Προσδιορίστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq M \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2,$$

όπου $M = \max\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$.

Άσκηση 11. Θεωρούμε την $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x > 0$, όπου $f^{(n)}$ είναι η n -οστή παράγωγος της f .

Άσκηση 12. Έστω (x_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1}$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$

Άσκηση 13. Να βρείτε όλες τις δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ που ικανοποιούν την

$$f''(x)f(x) \geq 2(f'(x))^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 14. Να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, όπου

$$S_n = \ln \left(\sqrt[n^2]{1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n} \right) - \ln(\sqrt{n}).$$

Άσκηση 15. (α) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^N a_n \cos(nx)$$

με $|a_0| < 1$, παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{100} \cos(n^{3/2}x)$$

έχει τουλάχιστον 40 ρίζες στο διάστημα $(0, 1000)$.

Άσκηση 16. (α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \frac{1}{2}.$$

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε, για κάθε $x \geq 1$,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{c}{x}.$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε την $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x(1-x)$. Ορίζουμε $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (σύνθεση, n φορές).

(α) Υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

(β) Υπολογίστε το $\int_0^1 f_n(x) dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.