Θέμα 1^{o}

α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n ώστε $P_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στο $\{z: |z|=1\}$

β) Έστω $f: \overline{D} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\overline{D}$ και ολόμορφη στο D, όπου $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$. Έστω $\varepsilon>0$, δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο P ώστε $|f(z)-P(z)|<\varepsilon \ \forall z\in\overline{D}$.

γ) Τό β) είναι ειδική περίπτωση του Θ. Mergelyan (που έχει δύσκολη απόδειξη). Μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη.

<u>Θεώρημα Mergelyan 1</u>. Έστω $K\subset\mathbb{C}$ συμπαγές με K^c συνεκτικό, $f: K\to\mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο K° (αν $K^{\circ}=\emptyset$ τότε μόνο f συνεχής στο K). Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο P ώστε $|f(z)-P(z)|<\varepsilon \ \forall z\in K$

<u>Θεώρημα Mergelyan 2</u>. Έστω $K\subset\mathbb{C}$ συμπαγές και υποθέτουμε ότι το $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus K$ έχει πεπερασμένο πλήθος συνιστωσών $V_1,\dots,V_N$. Διαλέγουμε $a_i\in V_i$, $i=1,\dots,N$ και θεωρούμε το σύνολο $A=\{a_1,\dots,a_N\}$. Έστω $f: K\to\mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο K° και έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει ρητή συνάρτηση R με πόλους μόνο στο A ώστε $|f(z)-R(z)|<\varepsilon \ \forall z$

Θεώρημα Runge 1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο (όχι κατ' ανάγκην συνεκτικό) με $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus\Omega$ συνεκτικό (δηλαδή $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοικτό απλά συνεκτικό). Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n ώστε $P_n\to f$ ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Ω καθώς $n\to+\infty$.

Θεώρημα Runge 2 Έστω $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο (όχι κατ' ανάγκην συνεκτικό) και το σύνολο A περιέχει ένα σημείο από κάθε συνιστώσα του $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus\Omega$. Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών συναρτήσεων R_n με πόλους μόνο μέσα στο A ώστε $R_n\to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές του Ω, καθώς $n\to+\infty$.

δ) ~~8)~~ Κατασκευάστε μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R=1$, ώστε η ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $n=1,2\ldots$ νά έχει τήν ακόλουθη ιδιότητα. Γιά κάθε z μέ $|z|=1$, κάθε $n\in\mathbb{N}$ καί κάθε $\varepsilon>0$ νά υπάρχει $m=m(z,n,\varepsilon)>n$ ώστε $|S_m(z)-S_n(z)|<\varepsilon$.

Θέμα 2ο

α) Έστω Ω τόπος καί $f:\Omega\to\mathbb{C}-\{0\}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)

(i) Υπάρχει $g:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f=e^{g}$ στ

(ii) Η $\frac{f'}{f}$ έχει παράγουσα στό Ω

(iii) Γιά κάθε κλειστή καμπύλη γ στό Ω ο δείκτης περιστροφής $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma,0)$ είναι μηδέν.

β) Δείξτε ότι τά προηγούμενα είναι ισοδύναμα μέ τό

(iv): Γιά άπειρα $n\in\mathbb{N}$, υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $\varphi_n:\Omega\to\mathbb{C}$ ώστε $[\varphi_n(z)]^n=f(z)$ $\forall z\in\Omega$.

γ) Δείξτε ότι άν η f μπορεί νά πάρει καί τήν τιμή 0, τότε (iv) $\Rightarrow$ (i) ή $f\equiv 0$.

Θέμα 3ο

α) Διατυπώστε και αποδείξτε την ανισότητα Cauchy για τους συντελεστές Taylor ολόμορφων συναρτήσεων.

β) Επεκτείνετε την ανισότητα Cauchy για τους συντελεστές Laurent, ολόμορφων συναρτήσεων σε ανοικτό δακτύλιο.

γ) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ ώστε $|f(z)| \leq |z|^\alpha \ \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

δ) Δείξτε ότι κάθε ακέραια συνάρτηση f ή είναι σταθερή ή $f(\mathbb{C})$ πυκνό στο $\mathbb{C}$.

ε) Επεκτείνετε το δ) για ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} - \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ και $w : \Omega \to \mathbb{C}$ όπου $\Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z = 0$ ή $z = \frac{1}{n}$ για κάποιο $n = 1, 2, \dots$

Θέμα 4°

α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση w ώστε $[w(z)]^2 = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

β) Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $[f(z)]^3 = z \ \forall z \in \Omega$.

Θέμα 5°

Έστω $K \subset \mathbb{C}$ κυρτό σύνολο και $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Θεωρούμε $F = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R \geq 1$, ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in K \ \forall z \in D \}$. Λ_0 είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών w ώστε $w = a_0$ για κάποια δυναμοσειρά από F. Έστω $n \geq 1$ τότε Λ_n είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών w ώστε $w = a_n$ για κάποια δυναμοσειρά από F. Δείξτε $\Lambda_0 = K$ και $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \dots$. Ακόμη Λ_1 έχει την ακόλουθη μορφή

Ἂν $w \in \Lambda_1$ καὶ $|\tau| \leq 1$ τότε $\tau w \in \Lambda$. Ποιές εἶναι οἱ δυνατὲς μορφὲς τοῦ Λ_1, Δῶστε αἰτιολόγηση

Θέμα 6°

α) Θεωροῦμε τὶς δυναμοσειρὲς $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ καὶ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ οἱ ὁποῖες ἔχουν ἀκτίνα σύγκλισης $R=1$. Χαρακτηρίστε γιὰ καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὸ σύνολο $E \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ὥστε ἡ σύγκλιση νὰ εἶναι ὁμοιόμορφη ὡς πρὸς τὴν Εὐκλείδεια ἀπόσταση τοῦ $\mathbb{C}$.

β) Ἂν οἱ δυναμοσειρὲς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ καὶ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ἔχουν ἀκτίνες σύγκλισης R_1 καὶ R_2 ἀντίστοιχα. Τί μποροῦμε νὰ ποῦμε γιὰ τὴν ἀκτίνα σύγκλισης R τῆς $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$; Δῶστε αἰτιολόγηση.

Θέμα 7

α) Διατυπώστε το Θ. Riemann για επουσιώδεις ανωμαλίες.

β) Εξηγείστε γιατί είναι να δείξετε αν αυτό εφαρμόζεται όταν δεν έχουμε μεμονωμένες ανωμαλίες.

γ) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $\Sigma \subset \mathbb{C}$ ευθεία. Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο Ω, ολόμορφη στο $\Omega - \Sigma$. Δείξτε f ολόμορφη στο Ω.

δ) Έστω $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ και $f: H \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ z \in H}} f(z) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{H}$ και ακόμη ότι επεκτείνεται ολόμορφα στο $\mathbb{C}$ και ότι $\forall z$ με $\operatorname{Im} z < 0$ η τιμή $F(z)$ της επέκτασης είναι $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

ε) Δείξτε ότι αν P είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και $P(z_0) = 0$ τότε και $P(\bar{z}_0) = 0$.

στ) Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$ και $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχή συνάρτηση. Για $z \in \mathbb{C} - [0,1]$ θέτουμε

$$\Phi(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt.$$

i) Δείξτε ότι Φ ολόμορφη στο $\mathbb{C}-[0,1]$.

ii) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\Phi\left(\frac{1}{2}+i\varepsilon\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}-i\varepsilon\right)\right]$

η) Για $\varphi \equiv 1$, δείξτε ότι η Φ είναι ολόμορφη και φραγμένη στο $[0,1]$ αλλά δεν επεκτείνεται σε μιαν συνεχή στο $\mathbb{C}$.

Θέμα 8

α) Η χορδική μετρική χ ορίζεται $\chi(\alpha,\beta) = \dfrac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}\,\sqrt{1+|\beta|^2}}$ για $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\chi(\alpha,\infty) = \chi(\infty,\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ για $\alpha\in\mathbb{C}$ και $\chi(\infty,\infty)$.

Δείξτε ότι η $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \ni z \to \frac{1}{z} \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ είναι ισομετρία. Δείξτε ακόμη ότι $\chi(\alpha,\beta) \leq |\alpha-\beta|$ και άρα η ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών ως προς την συνήθη Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{C}$ συνεπάγεται σύγκλιση ως προς χ). Δείξτε ακόμη ότι αν περιορισθούμε σε ένα συμπαγές υποσύνολο $L\subset\mathbb{C}$ τότε οι δύο μετρικές είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες, δηλαδή $I_L : (L,|\cdot|) \to (L,\chi)$ ~~…~~ είναι ομοιόμορφα συνεχής και η αντίστροφή της.

β) Βρεῖτε τὸ κατὰ σημεῖον ὅριο (μέσα στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) ὅπου ὁρίζεται τῆς ἀκολουθίας

$\varphi_n(z)=z^n$, $n=1,2,\ldots\ldots$, $z\in\mathbb{C}$.

Χαρακτηρίστε τὰ σύνολα $E\subset\mathbb{C}$ ὥστε ἡ σύγκλιση νὰ εἶναι ὁμοιόμορφη στὸ χωρίο

γ) Θεωροῦμε τὴν ἀκολουθία $S_n(z)=1+z+\cdots+z^n$ $n=1,2,\ldots$, $z\in\mathbb{C}$. Βρεῖτε τὸ κατὰ σημεῖον ὅριο, στὸ χωρίο X, ὅπου ὁρίζεται. Ἔστω $E\subset\mathbb{C}$ μὲ $\overline{E}$ τέμνει τὸ $\{z\in\mathbb{C}: |z|=1, z\neq 1\}$. Δεῖξτε ὅτι ἡ σύγκλιση δὲν εἶναι ὁμοιόμορφη στὸ E. Δεῖξτε ὅτι ἡ σύγκλιση εἶναι ὁμοιόμορφη στὸ $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἀκολουθία w_m, $m=1,2,\ldots$ μὲ $|w_m|<1$, $w_m\to 1$ ὥστε στὸ σύνολο $\{w_m; m=1,2,\ldots\}$ ἡ σύγκλιση νὰ μὴν εἶναι ὁμοιόμορφη. Δεῖξτε ὅτι στὸ σύνολο $\{w: |w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$ ἡ σύγκλιση δὲν εἶναι ὁμοιόμορφη.

Θέμα 9ο

α) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R=1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\lambda_n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ώστε $S_{\lambda_n}(2) \to \infty$ όπου $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$

β) Δώστε παράδειγμα δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ώστε να υπάρχουν $w \in \mathbb{C}$ και $t>0$ ώστε $|S_n(i) - w| = t$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Πόση η ακτίνα σύγκλισης σε οποιοδήποτε τέτοιο παράδειγμα;

~~Θέμα 10ο~~

γα) Έστω $A \subset \mathbb{C}$ φραγμένο σύνολο και $f: \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, η οποία σε κάθε σημείο $a \in A$ έχει ουσιώδη ανωμαλία ή πόλο. Έστω $z_0 \in \mathbb{C} - A$. Αν αναπτύξουμε την f κατά Taylor με κέντρο z_0 ποιά η ακτίνα σύγκλισης; Δώστε αιτιολόγηση ὅπου $A=[0,+\infty)$ καὶ ἡ ισοδυναμία δὲν ἰσχύει.

Θέμα 10°

α) Ἔστω $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ καὶ $f:\overline{D}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ συνεχὴς συνάρτηση. Υποθέτουμε ὅτι $f(D)\subset\mathbb{C}$ καὶ $f|_D$ εἶναι ὁλόμορφη. Ἔστω $\varepsilon>0$. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πολυώνυμο P ὥστε $\chi(f(z),P(z))<\varepsilon$ γιὰ κάθε $z\in\overline{D}$.

β) Ἔστω $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ καὶ $\varphi:D\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ συνεχὴς συνάρτηση. Υποθέτουμε ὅτι $\forall\, \zeta$ μὲ $|\zeta|=1$ τὸ $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}\varphi(z)$ ὑπάρχει στὸ $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $F:\overline{D}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ μὲ τύπο $F(z)=\varphi(z)$ ἂν $z\in D$ καὶ $F(\zeta)=\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}\varphi(z)$ ἂν $|\zeta|=1$.

Δείξτε ότι F συνεχής.

Θέμα 11

α) Γνωρίζουμε ότι στο $[\alpha,\beta]$ τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές είναι πυκνά στο $C_{\mathbb{R}}([\alpha,\beta])$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές είναι επίσης πυκνά. Άρα υπάρχει ακολουθία f_j, $j=1,2,\dots$ πυκνή στο $C_{\mathbb{R}}([\alpha,$

β) Κατασκευάστε μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n ώστε για κάθε συνεχή συνάρτηση $h:[1,2]\to\mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει $N=N(\varepsilon,h)$ ώστε $\left|h(x)-\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right|<\varepsilon \ \forall x\in[1,2]$.

Θέμα 12

Δυναμώστε τη διατύπωση του Θ. σταθερού σημείου χρησιμοποιώντας την γενικότερη θεωρία του ... μπορεί να έχουμε και συνθήκες συνέχειας.

Θέμα 13

α) $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ καί $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ συνεχής στό $\overline{D}$ καί ὁλόμορφη στό D. Γιά $|z|<1$ δείξτε τούς τύπους

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$ καί

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta$$ καθώς καί

$$f^{(\ell)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{\ell+1}}\,d\zeta.$$

β) Ἔστωσαν οἱ συναρτήσεις $\exp\frac{z+1}{z-1}$ καί ἡ ἀντίστροφή της $\exp\frac{1+z}{1-z}$. Ἰσχύει γιά αὐτές ὁ τύπος $f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta$;

γ) Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις $\exp\frac{z+1}{z-1}$ καί $(z-1)\exp\frac{z}{z}$ Τί εἴδους ἀνωμαλία ἔχουν στό 1; Δείξτε ὅτι ἡ δεύτερη εἶναι ὁλόμορφη στό D καί ἐπεκτείνεται συνεχῶς στό $\overline{D}$. Ἄρα οἱ τύποι τοῦ α) ἰσχύουν. Γιά τήν πρώτη ἰσχύουν.

Θέμα 14

Η αρχή ορίσματος που δεν διδάσκεται στο προπτυχιακό λέει τα εξής: Έστω f ολόμορφη στο τόπο Ω και γ μια απλή κλειστή καμπύλη στο Ω. Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0$ $\forall z$ πάνω στη γ. Τότε ο δείκτης στροφής $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma, 0)$ ισούται με το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των ριζών της f στο εσωτερικό της γ.

Ένα πόρισμα είναι το Θ. του Rouché: Ω τόπος και f, g ολόμορφες στο Ω. γ απλή κλειστή καμπύλη στο Ω και $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ $\forall z$ πάνω στη γ. Τότε οι f και g έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της γ λαμβάνοντας υπόψη και ~~τις~~ πολλαπλότητες. (Προφανώς πάνω στην γ καμμία τους δεν έχει ρίζα).

Ένα πόρισμα των προηγουμένων είναι το Θ. Hurwitz.

<u>Θεώρημα</u> Ω τόπος και f_n, f ολόμορφες στο Ω ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω. Υποθέτουμε ότι $f_n(z) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall z \in \Omega$. Τότε ή $f \equiv 0$ στο Ω ή $f(z) \neq 0$ $\forall$

Αποδείξτε την επόμενη άσκηση.

Έστω f ακέραια συνάρτηση. Τότε για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ και ανοικτό V το οποίο περιέχει το z_0 υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $I \subset V$, I παράλληλο στον άξονα των x με μήκος $|I| > 0$ ώστε

$$f(z_0) = \frac{1}{|I|} \int_I f(\zeta)\, d\zeta$$

(Παρατήρηση: επειδή $I \parallel$ στον άξονα των x, έχω $d\zeta = dx$).

Θέμα 15

Διατυπώστε την αρχή μεγίστου. Τι λέει η αρχή ελαχίστου;

Άσκηση: Έστω $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\overline{D}$, ολόμορφη στο D ($D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) και $|f(e^{i\theta})| = 1 \ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

α) Αν $f(z) \neq 0 \ \forall z \in D$, δείξτε $f(z) = $ σταθερή $= c$, $|c| = 1$.

β) Δείξτε ότι το σύνολο των ριζών της f στο D είναι πεπερασμένο.

γ) Αν το σύνολο των ριζών της f είναι n (λαμβάνοντας υπόψη και πολλαπλότητα), τότε

$$f(z) = c \prod_{j=1}^{n} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \quad \text{όπου } |c| = 1,\ |\alpha_j| < 1.$$