Μερικά Προβλήματα από τη Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών

Τα επόμενα προβλήματα αναφέρονται στην ύλη:
πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα
ισοτιμίες, κινεζικό θεώρημα υπολοίπων
μικρό θεώρημα του Fermat, θεώρημα του Euler, θεώρημα του Wilson

Συμβολισμοί: $\mathbb{N}=\{1,2...\}$, $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ είναι τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών, πραγματικών, μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα.
$m|n$ m διαιρεί τον n

1. Να βρεθούν οι $m,n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $m^n=n^m$.
2. Δεν υπάρχει μη σταθερό πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε ο ακέραιος $f(m)$ είναι πρώτος αριθμός για κάθε $m\in\mathbb{Z}$.
3. (Putnam 1952) Έστω $f(x)=a_nx^n+...+a_0$ ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε οι $a_n,a_0,f(1)$ είναι περιττοί. Τότε το $f(x)$ δεν έχει ρητή ρίζα.
4. (Putnam 1956) Έστω $n\in\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε στη δεκαδική γραφή του mn εμφανίζονται όλα τα ψηφία 0,1,…,9.
5. (Πολωνία) Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοια ώστε $f(n)\,|\,2^n-1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
6. (Putnam 1989) Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν στο σύνολο των ακεραίων της μορφής 101, 10101, 1010101, … (τα ψηφία εναλλάσσονται μεταξύ 1 και 0 στη δεκαδική γραφή και κάθε αριθμός έχει πρώτο και τελευταίο ψηφίο το 1).
7. (Putnam 2001) Να βρεθούν οι $x,n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $x^{n+1}-(x+1)^n=2001$.
8. (ΕΜΕ)Για κάθε θετικό ακέραιο $n>1$, έχουμε $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\notin\mathbb{Z}$.
9. Για κάθε $a\in\mathbb{N},a>1,$ ο πραγματικός αριθμός $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^9}+\frac{1}{a^{16}}+...$ είναι άρρητος.
10. Έστω $a,b,n\in\mathbb{N}$ με $a\neq b.$ Τότε $\mu\kappa\delta\left(\frac{a^n-b^n}{a-b},a-b\right)=\mu\kappa\delta\left(nd^{n-1},a-b\right),$ όπου $d=\mu\kappa\delta\left(a,b\right).$
11. Έστω $a,m,n\in\mathbb{N}$ με $a>1.$ Τότε $\mu\kappa\delta\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^d-1,$ όπου $d=\mu\kappa\delta\left(m,n\right).$
12. (Βιετνάμ 2007) Έστω $m,n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\frac{m^3+1}{n+1}+\frac{n^3+1}{m+1}\in\mathbb{Z}.$ Τότε $\frac{m^{2007}+1}{n+1}\in\mathbb{Z}$.
13. (ΙΜΟ 1988) Έστω $m,n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\frac{m^2+n^2}{1+mn}\in\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι ο $\frac{m^2+n^2}{1+mn}$ είναι τετράγωνο ακεραίου.

14. Έστω $m,n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε mn διαιρεί τον m^2+n^2+m. Τότε ο m είναι τετράγωνο ακεραίου.
15. Να βρεθούν τα δυο τελευταία ψηφία του 3^{1234} (δεκαδική γραφή).
16. (Πολωνία) Ένας ακέραιος λέγεται τριγωνικός αν είναι της μορφής $1+2+...+n$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι κάθε τριγωνικός αριθμός έχει ψηφίο μονάδων στη δεκαδική γραφή διάφορο των 2,4,7,9.
17. (Putnam 1975). Έστω $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ο $4n+1$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αν και μόνο αν ο n είναι άθροισμα δυο τριγωνικών αριθμών (βλ. προηγουμενο πρόβλημα για τον ορισμό τριγωνικού αριθμού).
18. Κανένας από τους 11, 111, 1111, … (δεκαδική γραφή) είναι τετράγωνο ακεραίου.
19. Έστω $a\in\mathbb{Z}$ με $\mu\kappa\delta(a,10)=1$. Δείξτε ότι ο a διαιρεί άπειρο πλήθος από τους αριθμούς 11, 111, 1111, … (δεκαδική γραφή).
20. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και περιττό πρώτο αριθμό p έχουμε $\left((p-1)!\right)^{p^{n-1}}\equiv -1 \bmod p^n$.
21. (Κορέα 1999) Να βρεθούν οι $n\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε ο 2^n-1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και ο $\dfrac{2^n-1}{3}$ διαιρεί τον $4m^2+1$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}$.
22. Έστω $n\in\mathbb{N}$.
    i) Αποδείξτε ότι ο n^4+4 είναι πρώτος αν και μόνο αν $n=1$.
    ii) Να βρεθούν οι πρώτοι της μορφής n^4+4^n
23. (Πανεπιστήμιο Michigan) Δίνεται ότι ο ακέραιος 1002004008016032 έχει έναν πρώτο παράγοντα $p>250000$. Να βρεθεί ένα τέτοιο p.
24. (ΙΜΟ 1970) Να βρεθούν οι $n\in\mathbb{N}$ που έχουν την εξής ιδιότητα. Το σύνολο $\{n,n+1,...,n+5\}$ διαμερίζεται σε δυο υποσύνολα έτσι ώστε το γινόμενο των στοιχείων του ενός υποσυνόλου είναι ίσο με το γινόμενο στοιχείων του άλλου συνόλου.
25. (ΙΜΟ 1984) Να βρεθούν $a,b\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε ο $ab(a+b)$ να μη διαιρείται με το 7 και ο $(a+b)^7-a^7-b^7$ να διαιρείται με το 7^7.
26. Έστω $A\subseteq\{1,2,...,100\}$ τέτοιο ώστε $|A|=51$.
    i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a,b\in A$ με $\mu\kappa\delta(a,b)=1$.
    ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a,b\in A$ με $a|b$ και $a\neq b$.
27. Αληθεύει ότι υπάρχουν 2007 διαδοχικοί ακέραιοι καθένας από τους οποίους διαιρείται με τετράγωνο ακεραίου μεγαλύτερου του 1;
28. (Putnam 1992) Να βρεθούν οι $a,b,m,n\in\mathbb{N}$ με $\mu\kappa\delta(m,n)=1$ τέτοιοι ώστε $\left(a^2+b^2\right)^m=(ab)^n$
29. (ΙΜΟ 1964) Αποδείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ο 2^n+1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 7. Στη συνέχεια βρείτε τους $n\in\mathbb{N}$ ώστε ο 2^n-1 είναι πολλαπλάσιο του 7.
30. (ΙΜΟ 2006) Να βρεθούν οι $x,y\in\mathbb{N}$ ώστε $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.
31. (Σιγκαπούρη) Έστω $x_1,...,x_n\in\mathbb{N}$. Τότε $\prod_{i<j}\dfrac{x_i-x_j}{i-j}\in\mathbb{Z}$.

Υποδείξεις Επιλεγμένων Προβλημάτων

1. Αν $m \le n$, τότε $m^n \mid n^n \Rightarrow m \mid n$.
2. Έστω ότι το $f(x)$ είναι πρώτος αριθμός για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Αν για κάποιο πρώτο p έχουμε $p = f(m)$, τότε $f(m+kp) \equiv 0 \bmod p$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και άρα $f(m+kp) = p$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άτοπο.
3. Εύκολο με απαλοιφή παρονομαστών.
4.
5. Αν για κάποιο n έχουμε $f(n) \ne \pm 1$, έστω πρώτος p με $p \mid f(n)$. Τότε $p \mid f(n+p)$. Άρα $p \mid 2^n - 1$ και $p \mid 2^{n+p} - 1$. Προκύπτει άτοπο λόγω του μικρού θεωρήματος του Fermat.
6. Έστω $a_n = 101...01$ (το πλήθος των 1 είναι n). Τότε a_2 είναι πρώτος και $a_2 \mid a_4$. Επίσης $a_3 = 1 + 100 + 100^2 = \dfrac{100^3 - 1}{99} = \dfrac{10^3 + 1}{11} \times \dfrac{10^3 - 1}{9}$. Γενικεύσετε τις παρατηρήσεις αυτές.
7. Δουλέψετε mod$x$ και mod(x+1).
8. Ένα παράδειγμα: Αν $1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{10} \in \mathbb{N}$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ προκύπτει άτοπο. Γενικεύσετε.
9. Η αναπαράσταση του δοσμένου αριθμού στη βάση a είναι περιοδική;
10.
11.
12. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu\kappa\delta(m+1, n+1) = 1$ (γιατί;) οπότε προκύπτει $\dfrac{m^3 + 1}{n+1} \in \mathbb{Z}$.
13. Υποθέστε ότι $m < n$ και ο ακέραιος $\dfrac{m^2 + n^2}{1 + mn}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Κατασκευάστε ένα άλλο ακέραιο $\dfrac{m^2 + n_1^2}{1 + mn_1}$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο και $n_1 < n$.
14. Έστω p^a η μέγιστη δύναμη ενός πρώτου που διαιρεί τον m με $a \ge 1$. Δείξτε ότι $a = 2b$, όπου b είναι η μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί το n.
15. Εφαρμόστε το Θεώρημα του Euler για τον υπολογισμό του $3^{1234} \bmod 100$.
16. Αρκεί να εξετάσουμε τι συμβαίνει για $n \le 10$.
17.
18. Θεωρείστε $\bmod 4$.
19. Έστω $a \in \mathbb{N}$. Έστω $a_n = 11...1$ (το πλήθος των 1 είναι n), οπότε $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$. Αν $\mu\kappa\delta(3, a) = 1$, εφαρμόστε το θεώρημα του Euler $\bmod a$. Στη συνέχεια, τροποποιήστε κατάλληλα το συλλογισμό όταν $\mu\kappa\delta(3, a) = 3$.
20. Επαγωγή.
21. Απάντηση: δυνάμεις του 2.

22. Και στις δυο περιπτώσεις παραγοντοποιήστε.
23. Θέστε $a = 10^3, b = 2$ και παραστήσετε τον δοσμένο ακέραιο συναρτήσει των a, b ώστε να προκύψει βολική παραγοντοποίηση.
24. Εξετάστε τι συμβαίνει $\bmod 7$. Άλλη λύση: Αποδείξτε ότι οι μόνοι πρώτοι που διαιρούν τουλάχιστον έναν από τους $n, n+1, ..., n+5$ είναι οι 2,3,5 και υπολογίστε τις δυνατές τιμές του γινομένου $n(n+1)...(n+5)$.
25.
26. Για το i) θεωρείστε τα σύνολα $\{1,2\},\{3,4\},...,\{99,100\}$ και εφαρμόστε την αρχή του περιστερώνα.
27. Ναι. Εφαρμόστε κατάλληλα το κινεζικό θεώρημα υπολοίπων.
28. Δείξτε πρώτα ότι ο $\mu\kappa\delta(a,b)$ είναι δύναμη του 2.
29. Εύκολο.
30. Αφού δοκιμάστε, μπορείτε επισκεφτείτε τη διεύθυνση http://imo2006.dmfa.si/imo2006-solutions.pdf
31. Ο αριθμητής παραπέμπει στην ορίζουσα Vandermonde.