ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

SEEMOUS 2013

1. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A \neq B$, $A^3 = B^3$ και $AB^2 = BA^2$. Μπορεί ο πίνακας $A^2 + B^2$ να είναι αντιστρέψιμος;
2. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, τέτοιοι ώστε οι πίνακες $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ να είναι αντιστρέψιμοι και οι αντίστροφοι να έχουν ακέραια στοιχεία. Να δείξετε ότι ο $A + 5B$ είναι αντιστρέψιμος και ο $(A + 5B)^{-1}$ έχει ακέραια στοιχεία.
3. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ με $\det(A^3 - I) = 1$. Να δείξετε ότι:
   (α′) $\det(A - I) = 1$ και
   (β′) αν $n = 2$ τότε $A^2 = 0$.
4. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος. Να δείξετε ότι ο V δεν μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση γνήσιων υποχώρων του, δηλαδή δεν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, U_2, ..., U_n < V$ με
$$V = \bigcup_{k=1}^{n} U_k.$$
5. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, f_1, f_2, ..., f_n : V \to \mathbb{R}$ γραμμικές απεικονίσεις. Να δείξετε ότι αν ισχύει
$$f_1(x) = f_2(x) = ... = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0,$$
τότε η f γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $f_1, f_2, ..., f_n$.
6. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει $n + 1$ ιδιοδιανύσματα, κάθε n εκ των οποίων είναι γραμμικά ανεξάρτητα να δείξετε ότι ο A είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.
7. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$ και
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$
για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Να δείξετε ότι αν λ ιδιοτιμή του A τότε $|\lambda| \leq 1$.
8. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να δείξετε ότι
$$\det(AB - BA) = \frac{tr((AB - BA)^3)}{3}.$$
9. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Υπάρχει πίνακας $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A = X^3$;
10. Έστω $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$. Να δείξετε ότι ο A έχει δύο μη πραγματικές ιδιοτιμές.

11. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Να δείξετε ότι αν οι A, B έχουν διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα, τότε είτε $m_{BA}(x) = x \cdot m_{AB}(x)$ είτε $m_{AB}(x) = x \cdot m_{BA}(x)$.

12. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ερμιτιανός με
$$A^5 + A^3 + A = 3I.$$
Να δείξετε ότι $A = I$.

13. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας. Να δείξετε ότι
$$rank(A) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^2,$$
όπου $\lambda_1, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A.

14. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με
$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$
για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

15. Να δειχθεί ότι κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ γράφεται ως άθροισμα ενός διαγωνίσιμου πίνακα κι ενός μηδενοδύναμου.

16. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AB = BA$ και $A^{2010} = B^{2011} = I$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + B + I$ είναι αντιστρέψιμος.

17. Έστω πίνακες $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AB = BA$, $AC = CA$ και $BC = CB$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε
$$\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0.$$

18. Έστω m, n θετικοί ακέραιοι και έστω $p_1, p_2, ..., p_m \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ πολυώνυμα στις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ με πραγματικούς συντελεστές. Αν
$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2,$$
να δειχθεί ότι $m \geq n$.

Ε.Μ.Ε., 15-16 Δεκεμβριου 2012