ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

SEEMOUS 2013

1. Έστω $a \in (0,2)$. Θεωρείστε την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση

$$x_{n+1} = ax_n + (1-a)x_{n-1},\ n \geq 1$$

με αρχικές τιμές $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει όριο και υπολογίστε το.

2. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (b_n) με

$$b_n = \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

είτε έχει πεπερασμένο όριο είτε τείνει στο άπειρο.

3. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_{n+1} - a_n \to 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο των οριακών σημείων της (a_n) είναι ένα κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να βρείτε μια φραγμένη ακολουθία (a_n) που να ικανοποιεί την παραπάνω αλλά να αποκλίνει;

4. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \to 0$. Να δείξετε ότι $a_n \to 0$. Για ποιές πραγματικές τιμές του λ ισχύει ότι αν $a_{n+1} - \lambda a_n \to 0$ τότε $a_n \to 0$;

5. Αν (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_{n+1} - a_n \to 0$ να δείξετε ότι $\frac{a_n}{n} \to 0$.

6. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ να συγκλίνει. Να δείξετε ότι

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{k=1}^{N} a_k = 0.$$

7. Έστω (a_n) και (ε_n) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών για τις οποίες $\varepsilon_n \to 0$ και υπάρχει $k \in (0,1)$ τέτοιος ώστε

$$a_{n+1} \leq ka_n + \varepsilon_n.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

8. Αν a_n η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$e^x + nx = 2$$

για $n \in \mathbb{N}$ να δείξετε ότι $1 - na_n \to 0$.

9. Έστω συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to [0,1]$ με $f \circ g = g \circ f$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) = g(x_0)$.

10. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδικές συναρτήσεις με περιόδους $a, b > 0$ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = u \in \mathbb{R}, \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = w \in \mathbb{R}, w \neq 0$$
να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f((3+\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b)}.$$

11. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με
$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, \forall k = 0, 1, ..., n.$$
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b) : f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.

12. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n \in (a, b)$ με
$$f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^n.$$

13. Δίνεται ότι
$$\int_0^\infty \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
Να υπολογιστεί το
$$\int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} dx.$$

14. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με
$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1.$$
Να δείξετε ότι
$$\int_0^1 (f(x))^2 \geq 4.$$

15. **(Ανισότητα Chebyshev)** Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο μονότονες συναρτήσεις με το ίδιο είδος μονοτονίας. Να δείξετε ότι
$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \leq (b - a) \int_a^b f(x) g(x) dx.$$
Ποιά είναι η αντίστοιχη ανισότητα αν οι f, g έχουν την αντίθετη μονοτονία;

16. Έστω συνάρτηση $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ και σταθερά $c > 0$ με
$$\int_1^t f(x) dx \leq c t^2, \forall t \in [1, \infty).$$
Να δείξετε ότι
$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)} dx = \infty.$$

17. Αποδείξτε ότι για κάθε $n = 1, 2, ...$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cost)^n dt \geq \frac{2^{n+1} - 1}{n + 1}.$$

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt < +\infty.$$

Να δείξετε ότι η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Ε.Μ.Ε., 15-16 Δεκεμβριου 2012