Θέματα Γραμμικής Άλγεβρας

(14-15 Νοεμβρίου 2009)

I. Θεωρια:

- Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων, διάσταση διανυσματικών χώρων και υποχώρων, άθροισμα και ευθύ άθροισμα υποχώρων, η διάσταση του αθροίσματος.
- Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες, η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης, τάξη πινάκων, ορίζουσες.
- Δομή δακτυλίου στο σύνολο $\mathbf{M}_n(F)$, οι πίνακες E_{ij}.

II. Ασκησεις:

1. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου, τέτοια ώστε οποιαδήποτε $n-1$ από αυτά να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να δειχτεί ότι:

   (ι) Υπάρχουν στοιχεία $a_1, \ldots, a_n \in F \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$.

   (ιι) Αν τα στοιχεία $b_1, \ldots, b_n \in F$ είναι τέτοια ώστε $b_1v_1 + \cdots + b_nv_n = 0$, τότε υπάρχει $\lambda \in F$ με $b_i = \lambda a_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

2. Αν $f : V \longrightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση με $f^2 = f$, τότε $V = ker f \oplus im f$.

3. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με $A^2 = A$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, έτσι ώστε $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Έστω $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με $f^2 = 1_V$ και $A, B \subseteq V$ με

   $$A = \{v \in V : f(v) = v\} \quad \text{και} \quad B = \{v \in V : f(v) = -v\}.$$

   Να δειχτεί ότι $V = A \oplus B$.

5. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με $A^2 = I_n$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, έτσι ώστε $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$.

6. Έστω $\mathbf{S}_n(F)$ (αντιστ. $\mathbf{A}_n(F)$) ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ συμμετρικών (αντιστ. αντισυμμετρικών) πινάκων. Να δειχτεί ότι $\mathbf{M}_n(F) = \mathbf{S}_n(F) \oplus \mathbf{A}_n(F)$.

7. Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με $f^2 = -1_V$. Να δειχτεί ότι:

   (ι) Υπάρχει μια βάση του V της μορφής $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$, για κατάλληλα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του V.

   (ιι) Η διάσταση $dim_{\mathbf{R}}V$ του V είναι άρτια.

8. Αν A είναι ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας με $A^2 = -I_n$, τότε ο $n = 2k$ είναι άρτιος και υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P, τέτοιος ώστε $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$.

9. Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες. Να δειχτεί ότι $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

10. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Να δειχτεί ότι:

    (ι) $r(A) + r(I_n - A) \geq n$ και

    (ιι) $r(A) + r(I_n - A) = n$ αν και μόνο αν $A^2 = A$.

11. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με $A^2 = 0$. Να δειχτεί ότι $r(A) \leq n/2$.

12. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $B = adjA$ ο προσαρτημένος πίνακάς του. Να δειχτεί ότι:

    (ι) Αν $r(A) = n$ τότε $r(B) = n$.

    (ιι) Αν $r(A) = n - 1$ τότε $r(B) = 1$.

    (ιιι) Αν $r(A) \leq n - 2$ τότε $r(B) = 0$.

13. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $B = adjA$. Να δειχτεί ότι $adjB = (detA)^{n-2}A$.

14. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $L_A : \mathbf{M}_n(F) \longrightarrow \mathbf{M}_n(F)$ η γραμμική απεικόνιση με $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbf{M}_n(F)$. Να δειχτεί ότι:

    (ι) $dim\, imL_A = n\, r(A)$ και

    (ιι) $detL_A = (detA)^n$.

15. (ι) Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας. Να δειχτεί ότι $tr(AB) = tr(BA)$.

    (ιι) Έστω $f : \mathbf{M}_n(F) \longrightarrow F$ μια γραμμική απεικόνιση, που ικανοποιεί τη σχέση $f(AB) = f(BA)$ για κάθε $A, B \in \mathbf{M}_n(F)$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $a \in F$, έτσι ώστε $f(A) = a\, tr(A)$ για κάθε $A \in \mathbf{M}_n(F)$.

16. (ι) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $f_A : \mathbf{M}_n(F) \longrightarrow F$ η απεικόνιση με $f_A(B) = tr(AB)$ για κάθε $B \in \mathbf{M}_n(F)$. Να δειχτεί ότι η απεικόνιση f_A είναι γραμμική.

    (ιι) Έστω $f : \mathbf{M}_n(F) \longrightarrow F$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχτεί ότι υπάρχει μοναδικός $n \times n$ πίνακας A, τέτοιος ώστε $f = f_A$.

17. Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση και $f, g : V \longrightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις με $f \circ g = g \circ f$. Να δειχτεί ότι κάθε ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης $f - g$ είναι της μορφής $\lambda - \mu$, για κάποια ιδιοτιμή λ της f και κάποια ιδιοτιμή μ της g.

18. Έστω $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ δύο πίνακες χωρίς καμία κοινή ιδιοτιμή. Να δειχτεί ότι για κάθε πίνακα $C \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ υπάρχει μοναδικός $D \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ με $C = AD - DB$.

19. Να δειχτεί ότι το κέντρο του δακτυλίου $\mathbf{M}_n(F)$ είναι το σύνολο των πινάκων της μορφής aI_n, $a \in F$.

20. Να δειχτεί ότι τα μοναδικά ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbf{M}_n(F)$ είναι το 0 και όλος ο $\mathbf{M}_n(F)$.

21. Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες με $A + B = AB$. Να δειχτεί ότι $AB = BA$.

22. Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες. Να δειχτεί ότι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα $\chi_{AB}(t)$ και $\chi_{BA}(t)$ των AB και BA αντίστοιχα είναι ίσα.

23. Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας. Να δειχτεί ότι για τα ελάχιστα πολυώνυμα $\mu_{AB}(t)$ και $\mu_{BA}(t)$ των AB και BA αντίστοιχα ισχύει ένα από τα επόμενα ενδεχόμενα: $\mu_{AB}(t) = \mu_{BA}(t)$ ή $\mu_{AB}(t) = t\mu_{BA}(t)$ ή $\mu_{BA}(t) = t\mu_{AB}(t)$.

24. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας, τέτοιος ώστε $A^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbf{N}$. Να δειχτεί ότι ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$.

25. Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας. Αν ο $n \times n$ πίνακας $I_n - AB$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχτεί ότι ο $m \times m$ πίνακας $I_m - BA$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει $(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$.

26. Έστω A, B δύο πραγματικοί $n \times n$ πίνακες. Να δειχτεί ότι:

    (ι) $det(A - iB) = \overline{det(A + iB)} \in \mathbf{C}$ και

    (ιι) $det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\, det(A + iB)\,|^2$.

Ιωάννης Π. Εμμανουήλ