SEEMOUS 2010-11 – ΕΜΕ, 18-19 Δεκεμβρίου 2010

Κυρτές συναρτήσεις I

1. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\xi\in(a,b)$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή.

(β) Αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,ξ) και αύξουσα στο (ξ,b).

(γ) Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.

(δ) Αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άνω φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

(β) Αν $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, τότε η f είναι σταθερή.

3. Δείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα είναι κάτω φραγμένη.

4. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=0.$$

5. Δείξτε ότι η μέγιστη περίμετρος n-γώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι $2n\sin(\pi/n)$.

6. Έστω $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $k\geq 1$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx\geq 0.$$

7. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $c\in(a,b)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο c αν και μόνο αν

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0.$$

8. Έστω $f:[0,+\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0)=0$. Ορίζουμε $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F(0)=0$ και

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.

9. Έστω I ανοικτό διάστημα και έστω $f:I\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν $[a,b]\subset I$, τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο $[a,b]$.

10. Έστω I ανοικτό διάστημα και έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$(f'(x)-f'(y))(x-y)\geq 0$$

για κάθε $x,y\in I$.

Κυρτές συναρτήσεις II

11. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x,y\in A$ τότε $\frac{x+y}{2}\in A$. Υποθέτουμε ότι $[0,1]\subset A$ και $2011\in A$. Είναι σωστό ότι $[800,1200]\subset A$;

12. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x,y\in A$ τότε $\frac{x+y}{2}\in A$. Δείξτε ότι: αν το A περιέχει κάποιο διάστημα $[a,b]$ τότε το A είναι διάστημα.

13. Έστω I διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in I$ τότε

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

(α) Δείξτε ότι: αν $n \in \mathbb{N}$ και $q_1, \ldots, q_n$ είναι μη αρνητικοί ρητοί αριθμοί με $q_1 + \cdots + q_n = 1$ τότε, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f(q_1x_1 + \cdots + q_nx_n) \leq q_1 f(x_1) + \cdots + q_n f(x_n).$$

(β) Αν η f είναι συνεχής, δείξτε ότι είναι κυρτή.

14. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in I$ τότε

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Αν η f είναι άνω φραγμένη σε κάποιο υποδιάστημα (γ, δ) του $[a, b]$, δείξτε ότι είναι κυρτή.

15. (α) Έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = g(x) + g(1 - x)$ είναι φθίνουσα.

(β) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$ και ικανοποιεί την $f(1-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι: για κάθε κυρτή συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

16. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$f(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$$

για κάθε διάστημα $[x - h, x + h] \subset (a, b)$.

17. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν, για κάθε $x \in (a, b)$,

$$\limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0.$$

18. (α) Έστω $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $b > 0$, η συνάρτηση $\phi(x) = f(b + x) - f(x)$ είναι αύξουσα.

(β) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ κυρτή και αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι: αν $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, τότε

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j f(a_j) \geq f\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j\right).$$

19. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ κοίλη, μη-αρνητική συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \leq \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,dx \;\text{ και }\; \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

20. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ κυρτή, φθίνουσα συνάρτηση με $f(0) = M$ και $f(1) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq \frac{2}{3}M\int_0^1 f(x)\,dx \;\text{ και }\; \int_0^1 f^3(x)\,dx \leq \frac{1}{2}M^2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

21. Έστω $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και έστω $a > 0$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι φθίνουσα, τότε

$$\int_0^\infty f(x)\sin(ax)\,dx \geq 0.$$

(β) Αν η f είναι κυρτή, τότε

$$\int_0^\infty f(x)\cos(ax)\,dx \geq 0.$$

22*. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη θετική κυρτή συνάρτηση με $f(0) > 1$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Θεωρούμε μια σημειακή φωτεινή πηγή, η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο $(0, 1)$ και υποθέτουμε ότι οι φωτεινές ακτίνες ανακλώνται από το γράφημα της f και από τον x-άξονα. Είναι σωστό ότι το χωρίο

$$S = \{(x, t) : x > 0, 0 < t < f(x)\}$$

φωτίζεται ολόκληρο;

23*. Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 1$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x, y > 0$ ισχύουν οι $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ και $f(x)f(y) \leq f(xy)$.

(β) Υπάρχει $p \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ώστε $f(x) = x^p$ για κάθε $x > 0$.

24*. Έστω $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ φθίνουσα συνάρτηση και έστω $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $\Phi(0) = 0$ ώστε η $\Phi(x)/x$ να είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$G(p) = \left(\frac{\int_0^\infty h(\Phi(x))x^p dx}{\int_0^\infty h(x)x^p dx}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

είναι φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$.

Σημείωση: Υποθέστε ότι τα ολοκληρώματα στον ορισμό του $G(p)$ υπάρχουν. Αν θέλετε, θεωρήστε μόνο την περίπτωση όπου η Φ είναι κυρτή με $\Phi(0) = 0$ και $h(t) = e^{-t}$.

25*. (α) Έστω $b, c > 0$ ώστε $\int_{-c}^b te^t dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{-c}^b e^t dt \leq \frac{4bc}{b+c}.$$

(β) Έστω $a, b, c > 0$. Υποθέτουμε ότι $\int_{-c}^b te^{at} dt = 0$. Αν $d = \frac{1}{2}\int_{-c}^b e^{at} dt$, δείξτε ότι: για κάθε άρτια κυρτή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int_{-c}^b \phi(t)e^{at} dt \geq \int_{-d}^d \phi(t)\,dt.$$

26*. (α) Έστω $f, g, m : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε

$$m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_\mathbb{R} m(x)\,dx \geq \left(\int_\mathbb{R} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_\mathbb{R} g(x)dx\right)^{1-\lambda}.$$

(β) Έστω $f, g, m : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε

$$m(x^\lambda y^{1-\lambda}) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty m(x)\,dx \geq \left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_0^\infty g(x)dx\right)^{1-\lambda}.$$